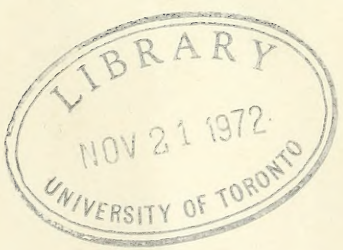
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00183936 4

893

WOLFGANG UND JOHANN BOLYAI

QA
29
B69S8
T. 1



Aufzeichnung Johann Bolyais aus dem Jahre 1820

URKUNDEN

ZUR GESCHICHTE DER

NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE

HERAUSGEGEBEN VON

FRIEDRICH ENGEL UND **PAUL STÄCKEL**

II

WOLFGANG UND JOHANN BOLYAI

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

WOLFGANG UND JOHANN BOLYAI

GEOMETRISCHE UNTERSUCHUNGEN

MIT UNTERSTÜTZUNG
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL STÄCKEL

ERSTER TEIL

LEBEN UND SCHRIFTEN DER BEIDEN BOLYAI

MIT DER NACHBILDUNG EINER AUFZEICHNUNG JOHANN BOLYAIS
UND 26 FIGUREN IM TEXTE

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

DEM ANDENKEN DES BAUMEISTERS

FRANZ SCHMIDT

DES UNERMÜDLICHEN VORKÄMPFERS
FÜR DIE SACHE DER BOLYAI

WIDMET DIESES WERK

DER VERFASSER

Vorwort

Von den beiden ersten Bänden der *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*, die ENGEL und ich im Jahre 1897 ankündigten, ist der erste, N. I. LOBATSCHEFSKIJ betreffende Band bereits 1898 von ENGEL herausgegeben worden. Daß der zweite Band, der sich auf Wolfgang und Johann BOLYAI bezieht, erst 15 Jahre später erscheint, hat seinen Grund hauptsächlich in den Schwierigkeiten, die sich bei der Bearbeitung herausstellten. Während nämlich ENGEL sich darauf beschränken durfte, zwei im Druck vorliegende Abhandlungen LOBATSCHEFSKIJS aus dem Russischen zu übersetzen und auf Grund der ausführlichen *Biographie* von JANISCHEFSKIJ und der beim Lesen der *Gesammelten geometrischen Werke* gewonnenen Einsichten über Leben und Schriften des russischen Mathematikers zu berichten, wurde es für die beiden BOLYAI notwendig, die wenigen gedruckt vorliegenden Urkunden durch Mitteilungen aus dem umfangreichen Nachlaß zu ergänzen und durch eigene Nachforschungen in Siebenbürgen eine umfassende Darstellung des Lebens und der Schriften der beiden ungarischen Mathematiker zu ermöglichen; dazu kam, daß die Übersetzung der Stücke aus dem *Tentamen* von Wolfgang BOLYAI wegen der eigenartigen Ausdrucksweise des Verfassers ungewöhnliche Mühe verursachte.

Bei den Vorarbeiten für dieses Buch und bei seiner Herausgabe bin ich von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften wirksam unterstützt worden. Es liegt mir daran, dem gewesenen General-Sekretär der Akademie, Herrn Koloman von SZILY, hierfür meinen wärmsten Dank auszusprechen; nicht minder groß ist meine Dankesschuld gegen den Klassensekretär, Prof. Julius KÖNIG, der leider das Erscheinen des Werkes nicht mehr erlebt hat.

Infolge des freundlichen Entgegenkommens des ev. ref. Kollegium zu Maros-Vásárhely, dem Wolfgang BOLYAI als Professor, Johann BOLYAI als Schüler angehört hat, konnte ich während meines wiederholten Aufenthalts in Siebenbürgen (März 1898, August 1901, September 1909) den in der Bibliothek des Kollegiums aufbewahrten handschriftlichen Nachlaß dieser beiden Männer einsehen und für mein Buch benutzen. Sehr wertvoll sind mir auch mündliche und schriftliche Mitteilungen von Wolfgangs letztem Schüler Josef KONCZ gewesen, der später als Professor am Kollegium gelehrt hat; requiescat in pace.

Wenn ich auch Johann Bolyais *Appendix* schon früher kennen und bewundern gelernt hatte, so bin ich doch erst durch den Baumeister Franz Schmidt, mit dem ich 1894 auf der Wiener Naturforscher-Versammlung zusammentraf, zu einer eingehenderen Beschäftigung mit den Schriften der beiden Bolyai angeregt worden. Dem unvergeßlichen Andenken des unermüdlichen Vorkämpfers für die Sache der Bolyai habe ich dieses Werk gewidmet.

Die lebhafte Teilnahme und nie versagende Unterstützung von zwei Landsleuten der Bolyai hat mich während der langen Jahren der Vorbereitung begleitet und ist mir auch bei der langwierigen Drucklegung treu geblieben; ich meine Herrn Prof. Josef Kürschák in Budapest und Herrn Prof. Ludwig Schlesinger in Gießen, der von 1897 bis 1911 an der Universität Klausenburg gewirkt hat. Ihnen an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank öffentlich auszusprechen ist mir eine besondere Freude.

Herr Prof. Ignaz Rados in Budapest hat sich der von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften veranstalteten ungarischen Ausgabe mit großer Sorgfalt angenommen; ich bin ihm nicht nur hierfür, sondern auch für die freundliche Hilfe bei der Durchsicht der Probeabzüge zu Dank verbunden.

Noch gar manchem habe ich zu danken, für Auskünfte, für Mitteilungen und Beiträge. An erster Stelle nenne ich Herrn Prof. P. Szabó in Budapest, der mir die in seinem Besitz befindlichen, wichtigen Urkunden bereitwillig zugänglich gemacht und deren Abdruck gestattet hat; ich nenne weiter die Herren Prof. M. Brendel in Frankfurt a. M., Bibliotheksdirektor C. Brodmann in Karlsruhe i. B., Prof. V. v. Dantscher in Graz, Prof. F. Engel in Gießen, Prof. J. Frischauf in Graz, Prof. C. Neumann in Heidelberg, Prof. M. Réthy in Budapest, Prof. K. Roth in Schäßburg (Siebenbürgen), Prof. F. Schur in Straßburg, G. v. Térey, Direktor der Königlichen Gemäldegalerie in Budapest.

Der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner bin ich für die Bereitwilligkeit verpflichtet, mit der sie allen meinen Wünschen für die Einrichtung und Ausstattung des Buches nachgekommen ist.

Heidelberg, im Juli 1913

Paul Stäckel

Inhalt des ersten Teiles

		Seite
I. Kapitel.	Die Familie Bolyai; Wolfgang Bolyais Jugend (1775—1796)	1—6
II. Kapitel.	Wolfgang Bolyai in Deutschland; Freundschaft mit Gauß (1796—1799)	7—11
III. Kapitel.	Rückkehr in die Heimat; Klausenburg und Domáld (1799—1804)	12—15
IV. Kapitel.	Wolfgang Bolyai als Professor in Maros-Vásárhely (1804—1853)	16—26
V. Kapitel.	Wolfgang Bolyai als Mathematiker Erster Teil: Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos introducendi	27—37
VI. Kapitel.	Wolfgang Bolyai als Mathematiker Zweiter Teil: Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie	38—50
VII. Kapitel.	Johann Bolyais Jugend (1802—1818)	51—60
VIII. Kapitel.	Johann Bolyai auf der Ingenieur-Akademie (1818—1823)	61—68
IX. Kapitel.	Johann Bolyai im Militärdienst (1823—1833)	69—74
X. Kapitel.	Die Entdeckung der absoluten Geometrie durch Johann Bolyai Erster Teil: Versuche das IX. Euklidische Axiom zu beweisen (1820—1823)	75—84
XI. Kapitel.	Die Entdeckung der absoluten Geometrie durch Johann Bolyai Zweiter Teil: Unbeweisbarkeit des XI. Axioms; der Appendix (1823—1832)	85—97
XII. Kapitel.	Johann Bolyai in Domáld	98—101
XIII. Kapitel.	Weitere Untersuchungen Johann Bolyais zur absoluten Geometrie	102—123
XIV. Kapitel.	Wolfgang und Johann Bolyais Arbeiten über imaginäre Größen	124—133
XV. Kapitel.	Johann Bolyai und N. I. Lobatschefskij Erster Teil: Wie Johann die Geometrischen Untersuchungen Lobatschefskijs kennen lernte	134—139
XVI. Kapitel.	Johann Bolyai und N. I. Lobatschefskij Zweiter Teil: Johann Bolyais Bemerkungen zu Nicolaus Lobatschefskijs Geometrischen Untersuchungen über die Theorie der Parallellinien	140—160
XVII. Kapitel.	Wolfgang Bolyais letzte Jahre (1848—1856)	161—170
XVIII. Kapitel.	Johann Bolyai in Maros-Vásárhely (1846—1860); mathematische Untersuchungen der Spätzeit	171—186
XIX. Kapitel.	Die Allheillehre Johann Bolyais	187—193
XX. Kapitel.	Schlußwort	194—202
Anmerkungen und Nachweisungen		203—272
Sach- und Namenverzeichnis		273—281

Zur Aussprache des Magyarischen

I. Vokale. 1. Die Vokale werden eingeteilt in kurze: a, e, i, o, ö, u, ü und lange: á, é, í, ó, ő, ú, ü. Außerdem kommt der Vokal y in Eigennamen vor. Die Akzente bedeuten Dehnung des Vokales.

2. Das a lautet ähnlich wie der dumpfe Vokal im englischen fall. Das e wird offen oder geschlossen ausgesprochen. Die Aussprache des é nähert sich, namentlich bei den Széklern in Siebenbürgen, der des langen i; es gibt im Deutschen keinen ganz entsprechenden Laut. Die übrigen Vokale unterscheiden sich nicht wesentlich vom Deutschen.

II. Konsonanten.

c und cz lauten wie das deutsche z,
ch in Eigennamen, wie Mentovich, wird wie tsch gesprochen,
cs lautet ebenfalls wie das deutsche tsch,
gy wie dj,
ly entspricht dem französischen l mouillé, etwa in billet,
ny lautet wie das französische gne, etwa in champagne,
s wird wie sch gesprochen,
sz ist ein scharfes s,
ty wird wie tj gesprochen,
v ist das deutsche w,
z ist ein weiches s,
zs lautet wie g vor e und i im Französischen, etwa in génie.

III. Betonung. Der Ton liegt stets und ohne Ausnahme auf der zuerst geschriebenen Silbe des Wortes; die Akzente über den Vokalen haben mit der Betonung nichts zu tun.

I. Kapitel

Die Familie Bolyai: Wolfgang Bolyais Jugend (1775—1796)

Die Geschichte der mathematischen Forschung in Ungarn beginnt mit Wolfgang Bolyai. Wer die Eigenart dieses merkwürdigen Mannes und seines nicht minder bemerkenswerten Sohnes Johann verstehen will, muß mit den politischen und sozialen Zuständen bekannt sein, unter denen diese Männer in dem südöstlichen Teile Ungarns lebten, der *Siebenbürgen*, *Transsilvania*, *Erdély* (Waldland) genannt wird.

Die *Magyaren* haben gegen das Ende des 9. Jahrhunderts begonnen, das ehemalige römische Dazien, das damals größtenteils unbewohnt war und nur in den fruchtbaren Flußtälern eine spärliche Anzahl slawischer Einwohner barg, in Besitz zu nehmen. Am Ende des 11. Jahrhunderts siedelten sich im südöstlichen Teile Siebenbürgens Magyaren in größeren Massen an; sie zogen aus dem Mutterlande nach der Gegend des Hargita-Gebirges, um dort die Grenzen zu bewachen und gegen die Einbrüche nomadischer Völker zu verteidigen. Diese Ansiedler, die von jeher gewisse Vorrechte genossen, wurden *Szekler* genannt. Nicht lange danach begann das Einwandern der *Walachen* (Rumänen) aus Gebieten des Balkans. Im 12. Jahrhundert kamen zahlreiche deutsche Ansiedler hinzu, besonders vom Mittel- und Niederrhein, die sogenannten *Sachsen*. Sie erhielten freien Grundbesitz auf dem „Königsboden" und Selbstverwaltung. Teils wohnten sie gedrängt in Dörfern zusammen, teils gründeten sie Städte, die rasch aufblühten; manche Sachsen gerieten auch im Laufe der Zeit unter die Hörigkeit magyarischer Grundbesitzer.

Gegen die Mitte des 16. Jahrhunderts trennte sich Siebenbürgen vom Mutterlande und wurde unter Schutzherrschaft des türkischen Sultans ein selbständiges Fürstentum. Dieser politischen Umwälzung folgte eine durch die Reformation hervorgerufene Umwälzung auf dem Gebiete der Religion. Die Walachen blieben wohl der griechisch-orientalischen Kirche treu, und auch ein Teil der Magyaren hielt an dem alten römisch-katholischen Bekenntnis fest; die Mehrheit von diesen ist jedoch damals zur evangelisch-reformierten Kirche übergetreten. Dagegen haben sich die Sachsen der evangelisch-lutherischen Konfession zugewandt. So wurden die Unterschiede in Rasse, Sprache und Sitten noch durch die Verschiedenheit der Konfessionen verschärft.

Am Ende des 17. Jahrhunderts hörte Siebenbürgen auf, ein nationales Fürstentum zu sein. Der Adel Siebenbürgens erkannte die Habsburger als Herrscher an, wogegen diese die Unabhängigkeit der inneren Verwaltung Siebenbürgens zusicherten. Im Jahre 1765 wurde Siebenbürgen von Maria Theresia zum Großfürstentum erhoben. Schwere Zeiten kamen, als Joseph II. die Hörigkeit aufhob; die Walachen empörten sich gegen ihre Herren, deren Schlösser sie niederbrannten (1784). Ähnliche Greuelszenen haben sich bei den Stürmen des Jahres 1848 wiederholt. Die Vereinigung Siebenbürgens mit dem Königreich Ungarn wurde 1848 ausgesprochen und 1868 verwirklicht.

Drei Meilen nördlich von Hermannstadt (magyarisch Nagyszeben), der ehemaligen Hauptstadt Siebenbürgens, liegt der Flecken Bolya (deutsch Bell), der Stammsitz der altadligen Familie derer v. Bolya; das Wappen der Familie ist ein grüner Hügel auf blauem Felde, auf dem Hügel steht ein Pfau in den natürlichen Farben. Der Name Bolyai wird bereits in Urkunden aus dem 13. und 14. Jahrhundert erwähnt, und vom Anfang des 16. Jahrhunderts an ist die Reihe der Ahnen lückenlos festgestellt worden. Es waren angesehene Großgrundbesitzer, die sich auch als Kriegsleute, besonders in den Kämpfen gegen die Türken, bewährten; ein Johann (János) Bolyai, der gegen das Ende des 16. Jahrhunderts lebte, hatte sogar die Auszeichnung, *homo regius*, Vertrauensmann des Königs von Ungarn, zu sein. Bald darauf geriet die Familie in Verfall und verlor den größten Teil ihres Grundbesitzes. Kaspar (Gáspár) Bolyai (1732—1804) besaß nur noch ein kleines, bei Bell gelegenes Gut. Er wird als ein naturliebender, fleißiger Landwirt und starker Charakter geschildert. „Mein Vater, ein ehrwürdiger Greis, ist den 17. Februar von seinem irdenen Kerker . . . frei geworden; seine immer starke, muntere Seele hat ihn auch in seinem Todesbette nicht verlassen . . . er hat adieu genommen und gefragt im letzten Augenblick: Wo ist der, wo ich nun hoffen soll? Gott! und ist eingeschlafen in die lange lange gute Nacht“ (Wolfgang Bolyai an Gauss, 1. März 1804). Verheiratet war Kaspar mit Christine Vajna v. Páva, die ihm 1777, als Erbteil von ihrer Mutter, ein Gut bei Malldorf (Domáld) in der Nähe von Maros-Vásárhely zubrachte, „die Edelkurie von Domáld mit den zugehörigen Äckern, Wiesen, Weinbergen, dem Wirtshaus-Benefizium und sechs Leibeigenen.“ Der Ehe entstammten zwei Söhne, Wolfgang (Farkas), Professor am evangelisch-reformierten Kollegium zu Maros-Vásárhely (1775—1856) und Anton (Antal), Obernotar des Komitats Oberweißenburg (1778—1845), ein fleißiger, verständiger, ehrenwerter Mann, der sich allgemeiner Achtung erfreut hat.

Wolfgang Bolyai wurde am 9. Februar 1775 zu Bell (Bolya) geboren.

Den ersten Unterricht erteilte ihm sein Vater. Aber schon im September 1781 wurde der Knabe auf einen Wagen gesetzt und nach Nagyenyed gebracht, wo er in dem evangelisch-reformierten Kollegium erzogen werden sollte. Das Köfferchen des Knaben hat Wolfgangs Sohn Gregor im Mai 1887 dem Kollegium zu Maros-Vásárhely geschenkt, in dessen Bibliothek es als Reliquie aufbewahrt wird.

Die vier evangelisch-reformierten Kollegien von Siebenbürgen: Nagyenyed, Klausenburg (Kolozsvár), Maros-Vásárhely und Székelyudvarhely waren Lehranstalten für die magyarische Jugend; in ihrem Lehrplane entsprachen sie ungefähr den deutschen „akademischen Gymnasien“ des 18. Jahrhunderts. Etwa mit dem 9. Lebensjahre traten die Schüler in die unterste Klasse der Grammatiker, in der sie ein Jahr zubrachten. Es folgten, in je einem Jahre, die syntaktische, deutsche, rhetorische, poetische Klasse. Den Abschluß bildete die zweijährige philosophische Klasse. Als „Studenten“ blieben die jungen Leute noch zwei Jahre auf dem Kollegium; der Unterricht bekam jetzt einen akademischen Charakter und bildete den Übergang zur Universität. Das Hauptgewicht wurde auf die alten Sprachen gelegt, und in den oberen Klassen war das Lateinische die Unterrichtssprache; daneben wurde aber auch Deutsch, Französisch und Geschichte getrieben. Daß der Religionsunterricht nicht vernachlässigt wurde, war auf dem der kirchlichen Behörde unterstellten Kollegium selbstverständlich. In der Mathematik beschränkte man sich auf die Erwerbung einer gewissen Fertigkeit im Rechnen und auf die gedächtnismäßige Aneignung der ersten Elemente der Arithmetik und Geometrie.

Wolfgang wurde in Nagyenyed zuerst von einem eigenen Lehrer, Johann Herepei, unterrichtet. Bald lenkte die ungewöhnliche Begabung des Knaben die Aufmerksamkeit auf ihn. „Sehr klein in die Schule geschickt“, erzählt Wolfgang, „gelehrig, lebhaft und nicht spielsüchtig lernte ich alles im voraus; neunjährig machte ich selbst gelernet über Jedes lateinischen Vers, und zwar geschwind; aus Homer wußte ich 500 Verse auswendig, auch Hebräisch wußte ich mancherlei; stark im Kopfrechnen, zog ohne Fehler aus 14[ziffrigen] Zahlen Quadrat- und Kubikwurzeln und verlangte mehr [ziffrige] Zahlen; wußte aber selbst nicht, daß man einen Grund davon wissen müsse. Man zeigte mich als ein Wunder; aber ich war [zu] einfältig, um mir etwas einzubilden, webte nur wie ein Wurm.“ Wie so mancher hervorragende Mathematiker hat Wolfgang eine über das Durchschnittsmaß hinausgehende Begabung für Sprachen besessen; außer seiner magyarischen Muttersprache beherrschte er das Lateinische, Deutsche, Englische und Französische; das Rumänische sprach er wie ein geborener Walache.

Leider haben die Lehrer einen so ungewöhnlichen Schüler nicht richtig zu behandeln gewußt. Statt den aufgeregten Geist zu beruhigen, stachelten sie ihn auf, stolz auf das Wunderkind, das sie den Besuchern des Kollegiums vorführten. Auch daß einer der Besucher, Graf Josef Teleki (1738—1796), die Professoren auf die Gefahren der allzufrühen Entwicklung des Knaben hinwies, hatte keinen Erfolg. Regungen von „Eigensinn" wurden aufs grausamste bestraft; noch im späten Alter hat Wolfgang mit Unwillen von den Mißhandlungen erzählt, die er in Nagyenyed zu erdulden hatte. Ohne Zweifel haben diese Schädigungen lange Jahre nachgewirkt. Aus ihnen erklärt sich, allerdings nur zum Teil, die Unruhe und Unstetigkeit der späteren Lebensführung; denn es sind auch andere ungünstige Umstände hinzugekommen, zum Beispiel ein Anfall von Typhus, den Wolfgang in Nagyenyed durchzumachen hatte.

Ein großes Glück für den Knaben war es, daß er mit 12 Jahren dem etwas jüngeren Baron Simon Kemény als Studiengenosse beigegeben wurde. Er kam dadurch in behagliche, sorgenlose Verhältnisse und gewann in dem feinsinnigen, feinfühlenden Genossen einen Freund, der ihm durchs ganze Leben Treue gehalten hat. Die beiden Knaben standen unter der Aufsicht von Adam Herepei, einem Bruder des erwähnten Johann Herepei. Um 1790 wurde Adam Herepei als Professor der Theologie an das ev. ref. Kollegium zu Klausenburg berufen. Simon und Wolfgang folgten ihm dorthin; sie besuchten das Kollegium und wohnten bei dem Professor der Theologie Michael (Pap) Szathmári, dessen Persönlichkeit auf Wolfgang den größten Eindruck machte. Er hörte seine theologischen Vorlesungen, und damit eröffnete sich ihm eine neue, geheimnisvolle Welt, der er sich mit Begeisterung hingab; sein Eifer für die Mathematik erkaltete. „Das am meisten irreführende war Folgendes", berichtet Wolfgang, „ein mit mehreren Preismedaillen aus Holland gezierter, mit dem Feuer von Mosis Dornbusch lehrender Professor der Theologie sagte mir oft, daß ich mich der Mathematik nur behutsam nähern solle; denn ich würde, auch in der Religion solche handgreifliche Beweise verlangend, von Satanas in die Hölle verführt werden; das war genug, um mich abzuwenden." Den Vorschlag des Barons Radák, er wolle ihn auf seine Kosten die Ingenieur-Akademie in Wien besuchen lassen, lehnte er daher mit den Worten ab, daß er zeitlichem Glanz nicht sein ewiges Heil opfern dürfe.

Bald erwachte er jedoch aus dieser Schwärmerei. „Nach dem Examen ging ich oft zu dem großen Gamaliel, den Satanas verklagend der Einwürfe wegen, mit denen er mich verführen will; unberuhigt verzweifelte ich — und fühlte mich in der Hand des Teufels. Darauf wurde ich Atheist . . . und bald darauf fand meine Seele Ruhe in der

reinen, von Menschen unverdorbenen Religion.“ Ein gewisser Mystizismus ist ihm freilich immer eigen geblieben; welchen Wert er auf diese Gedanken legte, beweist der Umstand, daß er ihnen in seinem großen mathematischen Werke, dem später zu besprechenden *Tentamen*, einen Platz eingeräumt hat.

Wie manche junge Leute von vielseitiger Begabung war Wolfgang längere Zeit ungewiß, welches Ziel er sich setzen sollte. Sein unruhiger Geist trieb ihn von einem zum andern, und so ist er sein ganzes Leben hindurch geblieben, immer war er *novarum rerum cupidus*. Sein Zeichenlehrer, der Talent in ihm fand, riet ihm, Maler zu werden; zwei von Wolfgang angefertigte Ölskizzen werden in der Bibliothek des Kollegiums zu Maros-Vásárhely aufbewahrt. Diesen Plan auszuführen hinderte ihn indessen ein Unglücksfall. Seine Augen wurden durch das Auffliegen von Schießpulver, das er sich selbst zubereitet hatte, so geschwächt, daß er auf einen Beruf verzichten mußte, der größere Anstrengungen des Sehvermögens verlangte.

Um dieselbe Zeit begann man in Klausenburg, dem Mittelpunkt des magyarischen Geisteslebens in Siebenbürgen, in der nationalen Sprache Theater zu spielen, wohl angeregt durch das Beispiel von Ofen (Buda), wo im Jahre 1790 eine Liebhabertruppe, zum ersten Male in Ungarn, Stücke in magyarischer Sprache aufgeführt hatte. Wolfgang tat mit und fand so großen Gefallen am Theater, daß er ernstlich überlegte, ob er Schauspieler werden solle. Endlich bewog ihn Baron Simon Kemény, als sein Begleiter nach Deutschland mitzugehen. Im 18. Jahrhundert war es nämlich Sitte, daß die Söhne des siebenbürgischen Hochadels zu ihrer weiteren Ausbildung deutsche Universitäten besuchten und ihnen ein älterer, talentvoller Mitschüler als Mentor beigegeben wurde.

Anfang 1796 machten sich die beiden Freunde auf den Weg. Aber schon in Zilah, einer Stadt zwischen Klausenburg und Großwardein (Nagy-Várad) mußte Wolfgang zurückbleiben; Simon ist allein nach Jena weitergereist. „Als ich nach Zilah kam, wurde ich krank. Man gab mir ein Brechmittel. Abends bot mir eine gute alte Frau Trauben an. Ich, im System der Theologie sehr bewandert, fragte, ob die Trauben nicht schaden würden. Da die Frau versicherte, daß sie das Innere kräftigen würden, aß ich. Man gab mich auf. Ich blieb zwar am Leben, aber mit einer unheilbaren Magenschwäche.“

So kam es, daß Wolfgang erst im Juli in Wien eintraf, wo er sich einige Zeit aufhielt. Wenig hat gefehlt, das hier sein Leben eine ganz andere Richtung nahm. „Als er dort“, erzählt sein Sohn Gregor, „die Artillerieschule besuchte und die schweigsamen, aber

an ihren Orten desto gewaltiger donnernden Kanonen und in ihren Zimmern die Akademiker mit der vor ihnen liegenden Höheren Mathematik von Vega erblickte, wurde seine leicht entzündliche Phantasie von der poetischen Seite der militärischen Laufbahn derart hingerissen, daß er keinen Schritt weiter tun und mit aller Gewalt Soldat werden wollte.“ Wolfgang selbst berichtet weiter: „An dem Tage, als ich meinen Eid leisten sollte, erhielt ich einen Brief von dem bereits in Jena eingetroffenen Baron Simon Kemény, der mich bat, wenn sein Wort je bei mir etwas gegolten habe, zu ihm zu kommen, um mit ihm über die Sache zu sprechen.“ Wolfgang folgte dieser Aufforderung. Der nun folgende dreijährige Aufenthalt in Deutschland ist von entscheidender Bedeutung für sein ganzes Leben geworden.

II. Kapitel

Wolfgang Bolyai in Deutschland: Freundschaft mit Gauss (1796—1799)

Wolfgang Bolyai hat sich in Jena, wo er erst im Juli 1796 eintraf, an der Universität nicht einschreiben lassen; er ist jedoch mit dem Baron Simon Kemény bis Ende September dort geblieben. „Zu jener Zeit war Fichte in Jena; Schiller las nicht, aber wir hatten das Glück, ihn persönlich begrüßen zu können.“ Von Goethe hat er damals den Werther gelesen, der ihn sehr niederdrückte. Überhaupt begann er, sich mit der deutschen Literatur vertraut zu machen, soweit das seine noch immer schwachen Augen gestatteten. Dazu kam die Beschäftigung mit der Mathematik, die ihn bald ganz in Anspruch nahm.

„Auf meinen Spaziergängen an den Ufern der Saale begann ich mit meinen geringen, zerstreuten, dunkeln mathematischen Kenntnissen den Weg, auf dem ich mich, älter geworden, noch befinde. Zwei Umstände führten mich dazu. Der eine war der ärztliche Rat wegen meiner Augen, derentwegen ich nicht viel zu lesen wagte und lange Zeit nur sinnend lernte, der andere die Unwissenheit, die zu meiner Führerin die Natur machte. Ich war an diese Art des Lernens so gewöhnt, daß ich mich schwer zum Lesen entschloß; ... nachdem ich mich hineingefunden, entdeckte ich zu meinem nicht geringen Leidwesen vieles, was ich bis dahin für mein Eigentum gehalten hatte.“ In ähnlichem Sinne berichtet sein Sohn Johann, wohl auf Grund von mündlichen Mitteilungen des Vaters. „Nun erst [in Jena] fing er an, sich auf Mathematik zu verlegen und die Gründe davon zu erforschen; suchte klare und allgemeine Begriffe, nebst anderen Grundlehren, von +, —, Multiplikation, Division, Potenz, ... gerader Linie und hauptsächlich einen Beweis des XI. Euklidischen Axioms. Und in der Tat fand er überall weit Besseres.“

Ende September verließen Baron Simon Kemény und Wolfgang Bolyai Jena und begaben sich nach Göttingen, wo sie am 11. Oktober 1796 immatrikuliert wurden. Daß die 1737 gegründete Georgia Augusta sie anzog, war erklärlich genug, lehrten doch an ihr viele hervorragende Männer, deren Namen noch heute unvergessen sind; es möge genügen den Historiker Heeren (1760—1842), die Philologen Heyne (1729—1812) und Mitscherlich (1760—1854), den Naturforscher Blumenbach (1752—1840), den Physiker Lichtenberg (1744—1799),

den Mathematiker Kästner (1719—1800) zu nennen. Auch fanden sie dort viele Landsleute; als sie ankamen, waren es beinahe dreißig. Unter ihnen scheint besonders der Baron Daniel Zeyk Wolfgang nahegestanden zu haben; auch an einen siebenbürgischen Sachsen Simonis, der Theologie studierte, schloß er sich an. Aber auch zu deutschen Kreisen gewann der junge Ungar Beziehungen. Kästner und Lichtenberg „konnten ihn gut leiden"; hier ist es freilich bei dem Respektsverhältnis geblieben. Dagegen hat sich der außerordentliche Professor der Astronomie Carl Felix Seyffer (1762—1822) seiner freundlich angenommen. Vielleicht trug dazu der Umstand bei, daß Seyffer sich ebenfalls mit den Grundlagen der Geometrie beschäftigte. Eigene Untersuchungen hat er nicht veröffentlicht, allein zwei Besprechungen von Versuchen das elfte Axiom zu beweisen, die 1801 in den Göttinger gelehrten Anzeigen erschienen, lassen erkennen, daß Seyffer die Schriften über diesen Gegenstand mit Verständnis gelesen und kritisch beurteilt hatte; ja er war zu der Einsicht gekommen, daß „es mehr als zweifelhaft scheine, ob es überhaupt möglich sei, das elfte Axiom zu beweisen, ohne ein neues Axiom zu Hilfe zu nehmen".

Bei Seyffer hat Wolfgang den Deutschen kennen gelernt, dem er am nächsten getreten ist und mit dem ihn eine echte Jünglingsfreundschaft verbunden hat: Carl Friedrich Gauss. Geboren den 30. Oktober 1777 zu Braunschweig hatte auch Gauss sich als Knabe durch ungewöhnliche Begabung und besonders durch eine außerordentliche Leichtigkeit und Sicherheit im Kopfrechnen ausgezeichnet. Auf feinsinnige Art vom Herzog Karl Wilhelm Ferdinand unterstützt konnte er das Braunschweiger *Collegium Carolinum* besuchen. Seit Oktober 1795 hielt er sich in Göttingen auf, weniger um zu studieren, denn der Achtzehnjährige beherrschte die höhere Mathematik schon in ihrem ganzen Umfange, als um die eigenen Forschungen in der Freiheit des akademischen Lebens fortzusetzen. Schon im März 1796 hatten ihn seine arithmetischen Untersuchungen zu der folgenreichen Entdeckung der geometrischen Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks geführt, und er hatte nun den Entschluß gefaßt, sich ausschließlich der Mathematik zu widmen.

„Als er [Wolfgang] von Jena nach Göttingen kam", erzählt Johann Bolyai, „traf er mit Gauss zufällig bei dem Professor [Seyffer] zusammen und äußerte sich da freimütig und entschieden über die Leichtfertigkeit der Behandlung der Mathematik; kurz darauf begegnete er Gauss am Walle beim Spazierengehen; sie näherten sich einander. Mein Vater sprach unter anderem von seinen Gedanken behufs Erklärung der geraden Linie und der etwaigen Wege zum Beweise des XI. Axioms, und der schon damals zum Koloß in den höheren Regionen der Wissen-

schaft, besonders der Zahlenlehre, emporgewachsene Gauss brach ergötzt, überrascht in die lakonischen Worte aus: »Sie sind ein Genie; Sie sind mein Freund!», worauf sogleich das Band der Brüderschaft erfolgte."

Über seinen Verkehr mit Gauss berichtet Wolfgang: „Er war sehr bescheiden und zeigte wenig; nicht drei Tage, wie mit Plato, jahrelang konnte man mit ihm zusammen sein, ohne seine Größe zu erkennen. Schade, daß ich dieses titellose, schweigsame Buch nicht aufzumachen und zu lesen verstand. Ich wußte nicht, wie viel er weiß, und er hielt, nachdem er meine Art sah, viel von mir, ohne zu wissen, wie wenig ich bin. Uns verband die wahre (nicht oberflächliche) Leidenschaft für die Mathematik und unsere sittliche Übereinstimmung, so daß wir oft, miteinander wandernd, mit den eigenen Gedanken beschäftigt stundenlang wortlos waren . . ." „Er ruhte von seiner anhaltenden, stillen Arbeit meistens bei mir aus; sprach nie im voraus, selbst bei Fertigem schweigend; nur einmal sah ich an ihm eine mäßige Freude, wo er [mir] die kleine [Schiefer-] Tafel, auf welcher er das 17-Eck Disqu. Ar. p. 662 berechnet hat, zum Andenken gab." . . . „Wir gingen auch zweie zu Fuß zu seinen Eltern nach Braunschweig, wo mich, wie Gauss nicht in der Stube war, seine Mutter fragte, ob aus ihrem Sohne etwas werde? und auf meine Antwort »*Der erste Mathematiker in Europa*» in Tränen zerfloß."

Während seiner Studienzeit in Göttingen hatte Gauss nur beschränkten Umgang, aber es waren tüchtige Menschen, mit denen in Verkehr zu kommen für Wolfgang sicherlich ein großer Gewinn gewesen ist. Vor allem sind zwei Landsleute von Gauss zu nennen, die Braunschweiger Eschenburg (1778—1861) und Ide (1775—1806), dieser ein Mathematiker, jener ein Jurist, die Gauss schon vom Carolinum her kannte. Dazu kamen der Jurist Eichhorn aus Wertheim (1779—1856) und der Mathematiker Brandes aus dem Hamburgischen (1777—1834). Auch in einige Familien ist Wolfgang durch Gauss eingeführt worden. „Ist Lina [Klindworth], die blonde, verheiratet? und die brünette Sophie Murrai, ihre Freundin", fragt er in einem Briefe an Gauss vom 10. April 1816, und am 16. Januar 1832: „Line Klindworth, Sophie Murrai, sind sie glückliche Mütter? und sind aus Rosen Stöcke, an welchen Rosen blühen, geworden?"

Bezeichnend für die Art, wie Wolfgang von den Göttinger Freunden beurteilt wurde, ist eine Stelle aus einem Briefe Ides an Gauss vom 23. Mai 1799: „Wenn ich recht kalkuliere, so kommt unser Bolyai zu rechter Zeit [wieder in Göttingen] an, um noch etwas an den Vergnügungen des Schützenfestes teilnehmen zu können. (Sonnabends wird, wie mir sinnlich ist, der König mit klingendem Spiel und Glocken-

geläute dreimal ums Haus geführt; nachgehends folgt eine Schwärmerpromenade.) Diesem wird er sicher beiwohnen, aber als Philosoph, der bei solchen Gelegenheiten Stoff findet, über die Torheiten der Menschen Betrachtungen anzustellen. Dies ist so seine Maxime, wie ich aus mehreren Fällen abstrahiert habe, er versäumt von dergleichen weltlichen Angelegenheiten so leicht keine, nicht etwa, um mitzugenießen, sondern um seine Seelenruhe zu befestigen. Neulich war wieder Burschenlärm, wobei wir zufällig Zuschauer wurden. Weil die Affäre sich bis spät in die Nacht hinzog, so ging ich um 10 Uhr zu Hause, konnte ihn aber nicht vermögen mitzugehen, nicht weil er Willens gewesen wäre, Taten auszuüben (denn wir hatten beide leere Hände), sondern um noch ferner über das Eitle des Aktus philosophieren zu können, welches er schon die ganze Zeit über, als ich bei ihm war, getan hatte."

Nach vollendetem akademischen Triennium kehrte Gauss Ende September 1798 nach Braunschweig zurück. Beim Abschiede hatten die beiden Freunde gelobt, am letzten Tage eines jeden Monats ein „Fest der Freundschaft" zu feiern, indem jeder am Abend in Gedanken an den andern eine Pfeife Tabak rauchte. „Dein Brief", schreibt Gauss an Bolyai am 29. November 1798, „wurde mir gerade am Abend, den letzten vorigen Monats gebracht, als ich mich hingesetzt hatte, um den Feiertag unserer Freundschaft zu begehen; da sitze ich in meinem Lehnstuhl, setze Dir Deine Pfeife gestopft hin und träume Dich zu mir herüber mit Deinem schwarzen Jäckchen und Deinem schwarzen Casquet und unterhalte mich mit Dir von vergangenen Zeiten, und gerade dann wird mir in Deinem Briefe durch Deine Frage die Gewißheit gebracht, daß Du jetzt ebenso an mich denkst, daß mein Traum kein Traum ist, möchte ich sagen." Zum Schwunge hoher Begeisterung aber erhebt sich Wolfgangs feurige Seele: „Am Abend des letzten Augusti [1799] habe ich meinen Toback bei so angenehm-traurigen Gedanken geraucht, bis selbst spät in der Mitternacht mich der Schlaf noch in Gedanken an Dich gefunden hat — ich dachte: wenn das Schicksal unsere Bahnen bis ans Ende fortlaufen gewährt — o dann, wenn einst das Alter in unseren Körpern seine Wappen aufstecket und, umwerfend die stolzen Säulen, auf welchen unsere Jugend, des vieljährigen Sieges gewohnt, den Elementen trotzte, die Ketten der Grazie, welche die Gestalt unserer blühenden Jugend erhielten, zerrissen und die Brücke zwischen uns und den Reizen der Sinnenwelt zerstöret hat, o dann soll unsere Freundschaft uns süße Früchte tragen — wenn wir am letzten Tage eines Oktobers, wo die Natur sich zu einem langwierigen Schlummer anschickt, unsere Pfeife rauchen, dann soll sie unseren tiefen Sinn von den unabsehbaren Höhlen des Todes und der Ewigkeit zurückrufen

und zu einer angenehmen Melancholie stimmen, welche uns durch Wiederholung des Vergangenen verjüngen wird."

Baron Simon Kemény war schon im Juni 1798 nach Siebenbürgen zurückgekehrt. Wolfgang mußte jedoch zurückbleiben als „Pfand für Simon Kemény, da die Ausgaben das gesandte Geld, ohne das wir es verschwendet hätten, überschritten. Da ich von Simon Kemény ein Jahr lang kein Geld erhalten konnte, stand ich viel aus, aber niemals war ich so glücklich. Jene Zeit, auf die ich immer mit Freuden zurückblicke, verging in freiwilligem Freundesopfer, im reinen Äther des Strebens nach Wahrheit, hoch über dem Morast körperlicher Genüsse. Meine edle Leidenschaft [für Mathematik] war während des ganzen Aufenthalts im Ausland (zwischen vielen Versuchungen) der Schutzengel meines reinen Lebens. Mein damaliges Ich achte ich noch heute."

Im Mai 1799 kam endlich der Wechsel. Nach Bezahlung aller Schulden blieb jedoch so wenig übrig, daß Wolfgang sich entschließen mußte, die Heimreise nach Siebenbürgen zu Fuß anzutreten. Ehe er Deutschland verließ, wollte er indessen seinen Freund Gauss noch einmal sehen. Am 24. Mai trafen die beiden, wie sie es verabredet hatten, gegen Sonnenuntergang bei Clausthal im Harz zusammen; ihre Pfeifen hatten sie mitgebracht. Wolfgang erzählte dabei, wie es scheint nur in kurzer Andeutung, daß ihm jetzt der Beweis des elften Axioms gelungen sei; auf diese seine „Göttingische Parallelentheorie" werden wir noch ausführlich zurückkommen. Am Morgen des 25. Mai begleitete Wolfgang seinen Freund bis zu einer Hügelspitze. „Da schieden wir mit einem sterbenden Abschiedshändedruck (fast wortlos), von einer und derselben Fahne ausgehend, mit dem Unterschied, daß er in den Tempel des Ruhms gelangte, ich aber fiel."

Am 5. Juni 1799 hat Wolfgang Göttingen verlassen. „Ich machte mich zu Fuß auf den Weg. Der Professor der Astronomie, der mit Napoleon bei Austerlitz war und dann sein Ingenieur-Oberst wurde, [Seyffer] und andere begleiteten mich zu Fuß bis zum nächsten Dorfe. Beim Abschied weinte ich wie ein Kind; ich ging wider Willen zurück, aber endlich überwand ich mich. Vom letzten Hügel, von dem Göttingen noch sichtbar war, blickte ich noch einmal zurück, so lange, bis auf der Dämmerung des Abschieds für ewig das Daguerrotyp eingeprägt blieb."

Die Erinnerung an Göttingen hat Wolfgang durch sein ganzes Leben begleitet. In einem Briefe, den er kurz vor seinem Tode am 13. Juli 1856 an Sartorius von Waltershausen gerichtet hat, spricht er noch mit Rührung von den überirdischen Jahren, die Gauss und er dort vor dem Altare der einzigen Urania verbracht hätten.

III. Kapitel

Rückkehr in die Heimat: Klausenburg und Domáld (1799—1804)

Im Juni 1799 hatte Wolfgang Göttingen verlassen. Erst im September ist er in der Heimat angelangt. Über die Erlebnisse auf seiner Reise hat er selbst und, auf Grund der Erzählungen des Vaters, sein Sohn Johann berichtet.

In neun Tagen kam er, größten Teils zu Fuß, nach Regensburg; er begann die Reise mit kleinen Märschen, die er täglich vergrößerte, indem er sich früher auf den Weg machte und später aufhörte. Noch am Tage seiner Ankunft in Regensburg bestieg er ein Schiff, das ihn donauabwärts nach Wien brachte.

Unterwegs stieg er in Passau aus und hatte dort zwei Abenteuer, die leicht hätten schlecht enden können. Er trat in ein Kaffeehaus ein und rauchte seine Pfeife. Vielleicht war das Rauchen verboten, vielleicht erregte sein auffallendes Äußere und sein Benehmen das Mißfallen der anwesenden Philister; er saß wie ein deutscher „Bursche“ da, der sich um nichts in der Welt kümmert, mit dichtem, langem Haar, das bis auf die Schulter fiel, und glühenden, großen Augen. Zehn Personen umringten ihn und wollten ihn hinauswerfen. Plötzlich sprang er in die Mitte des Saales und den gewundenen Knotenstock mit erstaunlicher Geschwindigkeit über dem Kopfe schwingend verkündete er sofortigen Tod dem, der seinen ungarischen, adligen Burschenleib anzurühren wage. Durch sein mutiges Auftreten und seine Geistesgegenwart jagte er die Angreifer so ins Bockshorn, daß einer nach dem andern sich vorsichtig zurückzog. Als er darauf beim Passieren eines Wachtpostens die Pfeife nicht aus dem Munde nahm, wie es damals Pflicht der Zivilpersonen war, wollte dieser sie ihm gewaltsam entreißen. Wolfgang packte ihn mit großer Kühnheit an der Brust und warf ihn an die Wand; unbehelligt ging er von dannen.

Als er die Reise fortsetzte, weckte ihn aus seinem Grübeln der Lärm des Schiffsvolks. Man war unterhalb Grein bei dem damals berühmten und gefürchteten Strudel. Er wollte stehend die gefährliche Stelle betrachten. Als aber die Schiffer dem müßigen Zuschauer zornige Blicke zuwarfen, kniete er nieder und sah nur verstohlen in die wirbelnde Flut. Auch an Romantik fehlte es nicht. Ein hübsches fünf-

zehnjähriges Mädchen betrat das Schiff. Um sich einen Dienst zu suchen, wollte sie nach Wien reisen, „für ihre unbefleckte Reinheit eine solche Flut des Schmutzes, der kein Fleckenreiniger gewachsen ist.“ Er wurde ihr Schutzengel. „Ich öffnete ihr den Himmel der Tugend und die Hölle der Sünde und wollte auf jede Weise die sich nach jedem Winde neigende Blume zu einer uneinnehmbaren Festung machen.“ In Wien angekommen — es war der 19. Juni — hielt er es für besser, sich von ihr zu trennen; „denn ich bedachte, daß auch der jungfräuliche Schnee durch das Lächeln der Sonne zum Morast wird und ich selbst zugrunde gehen würde, ohne sie zu retten.“

Zwei Monate blieb er in Wien. Wie es scheint, war er unter lustige Gesellen geraten, die seine Gutmütigkeit ausbeuteten. Als es mit seinem Gelde zu Ende ging, verließen sie ihn, und mit einigen Gulden in der Tasche stand er plötzlich allein in der großen Stadt. Kurz entschlossen verdingte er sich auf das Schiff eines serbischen Kaufmanns und gelangte im August 1799, von morgens bis abends das Ruder schwingend, glücklich nach Pest.

Als ob ein böser Geist ihn verfolgte, geriet er dort nach kurzer Zeit wiederum in eine mißliche Lage. In einem Wirtshause, wo er einkehrte, wurde er gefragt, was er in der Hand habe. Es war ein Stilet. Er zeigte es. Als er es in die Scheide zurückstecken wollte, verletzte er sich am linken Knie. Die Wunde verschlimmerte sich. Verlassen, mit leerem Beutel lag er im „Roten Ochsen“; er konnte keine Arzneien bekommen und war auf die Gnade kleinlicher, mißtrauischer Menschen angewiesen. Auf einen Brief nach der Heimat erhielt er durch einen unglücklichen Zufall keine Antwort. Anfangs vermochte er die Empfindung seiner elenden Lage zu unterdrücken und sich durch seine Seelengröße über die körperlichen Schmerzen zu erheben, ja er hatte eine so gute Laune, daß die Gäste kamen, um sich von ihm unterhalten zu lassen. Schließlich packte ihn jedoch die Verzweiflung, und nun wandten sich die Menschen von ihm ab. „Allein gelassen erhob ich mich mit tränenden Augen aus der nackten Wirklichkeit mit unaussprechlichem Gefühl ins Unendliche, zur Quelle der bodenlosen Flut unzähliger Sonnen. Und in jener Stunde kam die Hilfe. Ich wurde gesund und gelangte auf dem von Baron Simon Kemény geschickten Wagen nach Hause.“

Die Weinlese feierte er in Bolya bei seinem Vater. „Als ich aber einsah, daß ich bei ihm (vor der Hand), der unendlichen Verschiedenheit unserer Denkungsart wegen, unmöglich meinem Plane gemäß leben könnte, nahm ich im Kemény'schen Hause [in Klausenburg] eine Hofmeisterstelle an, da sie mir gerade zu der Zeit angeboten wurde und

der Jüngling von vierzehn Jahren (mein Zögling) was außerordentliches versprach. . . . Da lebe ich nun ziemlich ruhig und unabhängig. Nach einiger Zeit denke ich nach Hause zu gehen" (Brief an Gauss vom 13. April 1800).

Was ihn nach Klausenburg zog, war hauptsächlich der Verkehr mit geistig angeregten Menschen, der ihm zum Bedürfnis geworden war. „Er hatte weder einen Plan, noch ein Ziel; ebenso wie in den Universitätsjahren kümmerte er sich nicht um die materielle Seite des Lebens. Sein lebhafter und unruhiger Geist suchte einen Kreis, in dem er sich aussprechen und frei herumflattern konnte; einen solchen konnte er damals in Siebenbürgen am ehesten in Klausenburg finden. Jedenfalls wär er ein sehr beliebtes und gern gesehenes Mitglied dieses Kreises. . . . Diese jungen Männer finden wir später auf dem Lehrstuhl des einen oder anderen Kollegiums oder in der Kirche als Seelenhirten; wir begegnen den Namen von nicht wenigen unter ihnen in der Geschichte unserer vaterländischen Literatur und Wissenschaft" (Bedőházi).

Zu Wolfgangs Freunden zählte vor allem Paul Bodor, Kontrolleur der siebenbürgischen *delegata provincialis cassa*. Bodor besaß ein lebhaftes Interesse für Literatur und Kunst; er hat sich um die Gründung des Klausenburger Nationaltheaters verdient gemacht. Wolfgang ist mit ihm später in brieflichem Verkehr geblieben.

Aber auch mit den Damen der ungarischen Aristokratie wußte er umzugehen und war bei ihnen bis ins hohe Alter beliebt. „Selbst eitle junge Männer geben zu", erzählt Johann Bolyai, „der alte Bolyai verstände es, sich auch unter Damen so zu bewegen, daß er oft einer Reihe unter ihnen den Hof mache und wie ein Schmetterling von einer zur anderen flattere, sie auf sein baldiges Wiederkommen warten lasse und mit den geistreichsten Bemerkungen entzücke, ihnen den Kopf verdrehe, sie hinreiße und zugleich eine Schar hofierender junger Männer, die blasiert, fade und geistesarm gähnen, mit Leichtigkeit aus dem Sattel werfe . ." „Oft unterhielt er sich so lebhaft, daß er auf dem Heimweg in sich brummte: *Ich bin Feuer und Flamme*, und dann blitzten noch seine leuchtenden Augen" (Koncz).

Im Fasching 1800 lernte er auf einem Ball ein junges Mädchen kennen, Susanna, die Tochter des Wundarztes Josef Benkö v. Árkos; die Mutter Juliane geb. Bachmann stammte aus einer sächsischen Familie. „Eine gegenseitige Sympathie entflammte meine damalige Phantasie, die auch auf eine leere Leinwand einen Cherub gemalt hätte, sodaß alle meine Luftschlösser verbrannten. Das Herz eroberte den Königsthron des Verstandes." Und an Gauss schreibt er den 13. April 1800:

„Es ist . . . ein ungrisches Mädchen von 18 Jahren, meines Standes; ich brauche Dir weiter nichts zu sagen, als daß ich und sie einander vollkommen lieben. Es ist eben keine glänzende Schönheit, aber ungemein anziehend, sanft, von sehr feinem Geiste, spielt auch Fortepiano und singt aus Noten sehr angenehm und hat in der Musik den besten Geschmack — ich habe sie schon sehr viel gebildet, ich will das Werk vollenden."

Am 28. September 1801 fand die Trauung statt; es war die erste Amtshandlung des eben erwählten jungen Geistlichen Alexius Desiderius Krizbai in der Klausenburger Kirche. Das junge Paar nahm seinen Aufenthalt in Domáld. „Drei Jahre war ich Landwirt auf meinem Gute [1801—1804]. Ich befaßte mich mit dem Regulieren des Baches, mit dem Wasserfall, Wald, Hütte, mit dem Okulieren, Pflanzen, und dies alles führte mich zu der Jahre in Anspruch nehmenden Gärtner-Leidenschaft."

Am 15. Dezember 1802 wurde ihm im Hause der Schwiegereltern zu Klausenburg in der Tivoligasse (seit 1903 Johann Bolyai-Gasse) ein Sohn geboren, der am 21. Dezember in der Taufe den Namen Johann erhielt. „Es ist (Gott sei Dank!) ein gesundes, sehr schönes Kind von feinen Zügen und schwarzen Haaren und Augbrauen und brennend dunkelblauen Augen, die zuweilen wie zwei Juwelen spielen" (Brief an Gauss vom 27. Febr. 1803). „Überaus glücklich flossen die ersten Jahre des jungen Johann auf dem väterlichen Gute Domáld dahin. Das oft durch häusliche Sorgen und unleidliche Verwandtschaftsverhältnisse getrübte Familienleben bewegte sich um den geliebten Sohn, wie um eine stets Licht und Frohsinn spendende Sonne" (Schlesinger). „Unser Sohn, ein herrlicher Knabe, ist ein weckender Strahl in die Nacht unserer Seele" (Brief an Gauss vom 1. März 1804).

„Die Zukunft rückt in schweren Wolken schweigend heran, deren Donnern erst dann in die Ohren krachen, wenn sie da sind", hatte Wolfgang prophetischen Geistes in dem Briefe an Gauss vom 11. September 1802 geschrieben. Nur zu bald zogen die Wolken herauf. Susanna war eine Frau von ungewöhnlicher Begabung, aber sie war krank. Der Keim der Hysterie lag wohl in der Familie, von der Mutter her; auch Susannas Brüder waren psychopathisch. „Es ist ein großes, verstimmendes Unglück, ein kränkliches Weib zu haben" (Brief an Gauss vom 16. September 1804). Wolfgang sollte dieses Unglück bis zur Neige auskosten. In den späteren schweren Jahren sind den beiden Gatten die Jahre von Domáld immer als die nur zu rasch dahingegangene Zeit des Glücks erschienen; dort hat Susanna auch ihre letzte Ruhestätte gefunden.

IV. Kapitel

Wolfgang Bolyai als Professor in Maros-Vásárhely (1804—1853)

Nachdem der Professor der Philosophie und Mathematik Vajda v. Csernáton am 12. November 1803 gestorben war, beschloß der Lehrkörper des evangelisch-reformierten Kollegiums zu Maros-Vásárhely, diese beiden Fächer in Zukunft zu trennen und eine besondere Professur der Mathematik, Physik und Chemie einzurichten Dem Vorschlage des Kollegiums folgend berief die oberste Behörde des siebenbürgischen Kirchendistriktes durch Erlaß vom 22. Januar 1804 Wolfgang Bolyai in diese Stelle.

„Ein neuer Fall bei uns", schreibt er am 1. März 1804 aus Domáld an Gauss, „zwei von den ältesten Studenten sind zu mir herausgeschickt worden mit offizialischen Briefen. Lange habe ich mich besonnen. Geneigter war es nicht anzunehmen, da ich hinfüro meine Wirtschaft so ziemlich hätte eingerichtet und wäre von keinen so bestimmten Fesseln gedrückt als von den Sorgen, welche die Tage hervorbringen. Aber beschuldiget war ich als ein schlechter Bürger von vielen, und als ein Misanthrop. Endlich entschloß ich mich; es war auch meines Vaters Wille, weil es seine Maxime war, Amt zu verwalten, und wohl wußte er, daß ich kein anderes je würde verwalten."

Daß Wolfgang den Ruf annahm, war die letzte Freude seines Vaters, der bereits schwer erkrankt war und am 17. Februar 1804 entschlafen ist. „Nun sterbe ich ruhig", sagte er, „Wolfgang ist Professor in Maros-Vásárhely und Anton Vizenotär".

Im April 1804 ist Wolfgang nach seiner neuen Heimat übergesiedelt und hat am 4. Mai sein Amt angetreten, das er länger als 47 Jahre, bis zum Oktober 1851, verwaltet hat.

Maros-Vásárhely, zu Deutsch der *Marktplatz am Marosflusse*, liegt in einer freundlichen, hügligen Gegend. Die Stadt bildet den Mittelpunkt des westlichen Gebietes der Szekler. Hauptgebäude sind ein befestigtes Schloß mit Kaserne, die evangelisch-reformierte Kirche, mehrere römisch-katholische Kirchen und ein Minoritenkloster, ferner das Palais der Grafen Teleki mit einer großen Bibliothek, die Graf Samuel Teleki begründet hatte; sie enthielt hauptsächlich juristische, aber auch wertvolle Werke mathematischen und physikalischen Inhalts.

Endlich ist das Kollegium zu nennen, ein stattliches Gebäude mit Klassenzimmern und Wohnräumen für zahlreiche Schüler; im Jahre 1766 zählte die Anstalt 784 Zöglinge. Das Kollegium war 1557 zu Sárospatak gegründet worden. Mit Stolz wird erzählt, daß der berühmte Pädagoge Comenius, von Georg Rákóczi I. berufen, 1650—1652 an ihm gelehrt habe. Später wurde es nach Weißenburg (jetzt Karlsburg, magyarisch Gyulafehérvár genannt), dann nach Bethlen verlegt und 1718 mit einer kleineren, dort schon bestehenden Anstalt zu Maros-Vásárhely vereinigt.

Das Gehalt der Professoren war mäßig, 400 ungarische Gulden (im Werte von etwa 70 Pfennigen); eine Nebeneinahme verschafften sie sich durch Nachhilfe-Unterricht. Dazu kam für Wolfgang Bolyai ein Hof mit Haus und großem Garten. Die Amtswohnung des Vorgängers war ein zerfallenes Holzgebäude gewesen. Schon 1803 hatte man beschlossen, daneben ein neues, besseres Haus zu bauen, aber erst 1806 wurde die einfache Wohnstätte fertig. Das alte Gebäude ist für die Zwecke des Kollegiums zu einer kleinen Buchdruckerwerkstätte eingerichtet worden; aus ihr ist Wolfgang Hauptwerk, das *Tentamen*, hervorgegangen.

Die Wohnung, die Wolfgang bis zu seinem Tode 1856 inne hatte, bestand aus drei Zimmern nebst Küche, Kammer und doppeltem Keller. Einen der Vorderräume benutzte er für sich, den Rest überließ er der Familie. An den braunen Wänden seines Zimmers hing ein Bild seines Freundes Gauss; dazu kam Shakespeare, *„der Sohn der Natur“*, und Schiller, *„der Enkel der Natur“*; dann seine Geige. Hier stand auch sein *„Palladium“*: die schwarze Tafel. Hinter dem Haus war ein Garten, fast zwei Morgen groß, zum Teil Zier- und Küchengarten, zum Teil im Naturzustande. „Wie gern möchte ich Dich in meinem schon aufgewachsenen und tragenden Garten an dem im dunklen Pappelwalde schlängelnden Bache bewirten samt Deiner ganzen Familie... Zehn und mehr Jahre lang war die Gärtnerei meine Passion, es hat mir viel Zeit weggenommen“ (Brief an Gauss vom 10. April 1816). Die enge Gasse, an der das Grundstück lag, ist 1872 verbreitert worden. Seit 1884 heißt sie Bolyai-Gasse. Das Haus hat 1909 einem Neubau Platz machen müssen, aber eine Tafel erinnert daran, wer hier zum Ruhme der Stadt und des Vaterlandes gelebt und gewirkt hat.

Das Amt bot Veranlassung genug, daß Wolfgang die Beschäftigung mit der Mathematik wieder aufnahm, die in Domáld in den Hintergrund getreten war. „An Büchern bin ich sehr arm“ äußert er sich am 1. März 1804 zu Gauss, „und ich muß notwendig solche haben, bei uns wäre man mit wenigen Büchern vor einen Ochsen gehalten .... schreibe mir einen Katalog der vortrefflichsten Bücher der Mathematik und Physik“. Trotz seinen kleinen Einkünften, trotz der Schwierig-

keiten, mit denen bei der Abgelegenheit seines Wohnorts die Beschaffung von Büchern verbunden war, hat Wolfgang doch allmählich eine ganz stattliche Sammlung mathematischer und physikalischer Bücher zusammengebracht; nach dem Verzeichnis, das er kurz vor seinem Tode, im August 1856, aufgestellt hat, besaß er Werke von Euklid, Kepler, Adrian Metius, Newton, Johann Bernoulli, Euler, Lagrange, Gauss, die großen Lehrbücher von Littrow, Kästner, Karsten, La Croix, die Astronomie von Lalande, die Geschichte der Mathematik von Montucla.

Sogleich nach Antritt des Amtes begann Wolfgang, sein *System* der Mathematik auszuarbeiten. In langwieriger, oft unterbrochener Arbeit ist hieraus sein großes Lehrbuch der Mathematik, das *Tentamen*, hervorgegangen: erst im Herbst 1829 war das Werk im wesentlichen abgeschlossen. Als Probe seiner Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik und Geometrie sandte er am 16. September 1804 an Gauss seine *Göttingische Parallelentheorie*. Dieser antwortete am 25. November, daß ihm Wolfgangs Verfahren noch nicht Genüge leiste. Am 27. Dezember 1808 ließ Wolfgang eine Ergänzung folgen, die jedoch, wie er später selbst erkannte, auch nicht ausreichend war. Noch mehrere Jahre hat Wolfgang mit dem alten Rätsel der Parallentheorie gerungen. „Da ich aber mit meinen Versuchen, die Parallelen zu beweisen, nicht zufrieden war und nach langer Zeit, obgleich ich sie bis zur Grenze der Möglichkeit untersuchte, und auch dann keine Ruhe fand, schwand mein Feuer für die Mathematik, und ich warf mich auf die Poesie."

„Das Volk wird immer Mathematik hassen", klagt Wolfgang am 18. Dezember 1807 seinem Freunde Gauss, „wie ich herkam, es war beinahe niemand im Collegio, der mehr als die vier Species mechanisch wußte. Itzt sind viele, die in der Algebra, Kegelschnitten, angewandten Mathematik und Physik ziemliche Fortschritte getan haben, auch in die Differential- und Integralrechnung habe ich schon eingeweiht. — Du weißt, wie wenige auch draußen die Mathematik lieben".

Von den drei Eigenschaften, die ein vortrefflicher Lehrer in sich vereinigen muß, besaß Wolfgang zwei, und zwar in hohem Grade: den Enthusiasmus für seine Wissenschaft und ein warmes Herz für die Jugend. Was ihm fehlte, war die Gabe, seine Gedanken in leichtverständlicher Form darzustellen. Wohl hat er durch die hinreißende Lebhaftigkeit seines Vortrags Eindruck zu machen verstanden und, wenn er von dichterischer Begeisterung getrieben, Gott als den Urquell der Wahrheit und der Liebe pries, die jungen Seelen mitgerissen. Allein es waren immer nur wenige Auserwählte, die seinen mathematischen Darlegungen folgen konnten, und die Mehrzahl hatte wenig Gewinn.

Als er einmal an der Tafel eine Aufgabe entwickelte und ihn trotz gespannter Aufmerksamkeit niemand verstehen konnte, wagte es sein zweiter Sohn Gregor, damals sein Schüler, zu sagen, sie könnten ihn wahrhaftig nicht verstehen und bäten ihn, es noch einmal zu erklären. „Als ob man ihn aus dem Sternenhimmel in den Kot der Erde gezerrt hätte, mit solcher Betroffenheit warf er seine blitzenden Blicke auf den Sohn und die übrigen Schüler, und indem er sagte, wie es denn möglich sei, daß ein vernünftiger und nüchtern denkender Mensch das nicht verstände, arbeitete er die Aufgabe noch einmal durch, aber seine Illusion war ganz dahin" (Koncz).

An dieser Stelle muß auch der Bemühungen Wolfgangs gedacht werden, die damals noch wenig entwickelte mathematische Terminologie der magyarischen Sprache auszubilden. Sie stehen in unverkennbarem Zusammenhang mit den gleichzeitigen Bestrebungen der *Neologen*, an deren Spitze Franz Kazinczy (1759—1831) stand. „Je mehr man in den letzten drei Dezennien des achtzehnten Jahrhunderts übersetzte, desto mehr fühlte man die Armut der Sprache, besonders an Ausdrücken für abstrakte Begriffe. Ferner hatte die Verwilderung im 18. Jahrhundert eine Menge lateinischer und deutscher Vokabeln in den Sprachschatz gebracht, die die Eleganz beeinträchtigten. Es war nun die Aufgabe der Grammatiker und Schriftsteller, teils durch Neubildungen, teils durch Verkürzungen, teils durch neue Suffixe Wörter zu bilden, damit jede Gattung der Poesie und der Prosa, jedes wissenschaftliche Werk ins Magyarische übertragen werden könne. Wenn man das mit Bienenfleiß von Koloman Szily gesammelte Material, das *Wörterbuch der Spracherneuerung* (1902), durchblättert, so ist man von der Fülle der neugebildeten Wörter, zu den Kazinczy und seine Anhänger den Anstoß gaben, ganz erstaunt. ... Daß die Neologen sehr oft zu weit gingen, daß sie den alten Wortschatz nicht genügend ausbeuteten und Worte schufen, die ganz unnötig waren, ist heute eine anerkannte Wahrheit" (I. Kont). „Die Spracherneuerung oder die erneute Sprache hat durch den Gemeinsinn der Nation, durch die einhellige Teilnahme der höheren und niederen Gesellschaftskreise an der Sache der Sprache und durch die zunehmende Anzahl besserer Schriftsteller den endgiltigen Sieg errungen. Was dabei gut war, was mit dem nationalen Gemeinsinn in Übereinstimmung war, wurde baldigst allgemein und bereitwillig angenommen. Durch den Willen, mitunter durch die Willkür einzelner hervorgerufen, hat diese Bewegung, wenn sie sich auch manchmel revolutionär gestaltete, ein wirkliches Bedürfnis befriedigt und Gediegenes geleistet; dies wurde durch die öffentliche Meinung gerechtfertigt. Diesem nationalen Willen entsprach auch die Akademie, die im Jahre 1830,

besonders um die Sprache auszubilden, ihre Tätigkeit begann" (Alexander Imre).

Mit Hunderten von neugebildeten Worten ist auf diese Art die magyarische Sprache dauernd bereichert worden. Wolfgang Bolyais Vorschläge für die mathematischen Fachausdrücke gehören zu den Neubildungen, die keine Aufnahme gefunden haben, aber sie sind doch einem gesunden patriotischen Gefühl entsprungen, und seine Tätigkeit auf diesem Gebiete bildet einen Zug in seinem Charakter, der nicht übergangen werden darf. „Wenn wir einerseits erröten" schreibt er im *Tentamen*, „daß wir in der Mathematik nicht gerade die Lehrer anderer Völker und daß nur wenige unter uns (halb und halb) deren Schüler sind, so *machen wir* andererseits, damit wir einst auch ihre Lehrer sein können, *wenigstens jetzt, solange es noch Zeit ist, von dem gerade aus unserem Zurückgebliebensein stammenden Recht Gebrauch*, das andere Völker schon verscherzt haben; indem diese schon vor langer Zeit die Wiegensprache der Mathematik übersetzt hatten, wurzelten sich viele Ausdrücke in die Jahrhunderte ein, die den Geist des Schülers von deren wissenschaftlichen Sinn ablenken. Dies hat Einfluß auf die nationale Kultur." Wolfgang hat sich auch ausführlich über die Grundsätze ausgesprochen, nach denen er dieses Adamsrecht, den Dingen Namen zu geben, ausgeübt hatte; näher darauf einzugehen ist hier nicht möglich, da es eine genauere Bekanntschaft mit der magyarischen Sprache voraussetzen würde.

Wolfgang war ein reich begabter Mensch, ja es war vielleicht sein Verhängnis, daß er zu reich begabt war; anstatt auf einem Gebiete das Höchste zu leisten, hat er seine Tätigkeit zerstreut und zersplittert. Wenn man aber fragt, welche Fähigkeit bei ihm die erste Stelle einnimmt, so wird ohne Zweifel die Phantasie zu nennen sein. Alles was er schrieb gestaltete sich unwillkürlich zum Gedicht; fast jeder Brief, fast jede Seite seiner Bücher geben hiervon Zeugnis.

Als die Liebe zu Susanna Wolfgangs jugendliches Herz entflammte, hatte sich ihm der Born der Lieder geöffnet. „Es mögen ... diese nie empfundene, intensive Gefühle eine Funke in meine Seele geworfen haben, die das poetische Feuer darin aufgewecket hat" (Brief an Gauss vom 13. April 1800). Freilich war die Glut der Liebe nur allzu rasch erloschen. „Wie täuscht sich der Mensch, der im Hochsommer glaubt, daß es im Dezember immer so heiß sein werde; so geht es auch demjenigen, der aus Liebe heiratet." Aber auch die Leidenschaft für „seine wahre Freundin", die Mathematik, war erkaltet. „In dieser Stimmung mußte ich in eine *ideale* Welt auswandern" (Brief an Sartorius von Waltershausen vom 13. Juli 1856).

Wie im ersten Kapitel erzählt wurde, hatte im Jahre 1790 eine Liebhabertruppe zu Ofen zum ersten Male in Ungarn Theaterstücke in magyarischer Sprache aufgeführt. Das Theater hielt sich nicht lange, aber das Eis war gebrochen, und das Bühnenwesen fing an, sich in Ungarn zu verbreiten. Diese Bewegung hatte, wie wir gesehen haben, auch auf Siebenbürgen übergegriffen, und in Klausenburg ist, nachdem der Landtag schon 1811 die Gründung beschlossen hatte, 1821 das erste stehende Nationaltheater eröffnet worden. Damit das Unternehmen würdig beginne, stifteten im Jahre 1814 mehrere siebenbürgische Magnaten einen Preis von 1000 rheinischen Gulden für ein Drama, das bei der Eröffnung aufgeführt werden sollte. Die Preisausschreibung übernahm die Siebenbürgische Museumsgesellschaft; an der Spitze der Jury stand Gabriel Döbrentei. Bis zum September 1815 liefen zehn Dramen ein, darunter drei von Wolfgang Bolyai. Da drei Verfasser baten, man möchte im Sinne der Bedingungen, die für die Bewerbung um den Preis festgesetzt waren, die Einreichungszeit verlängern, wartete man mit der Beurteilung, und so zog sich die Urteilsverkündigung fast zwei Jahre hin. Wolfgang konnte seine Ungeduld über die Verzögerung nicht bemeistern und ließ schließlich, ohne die Preisverteilung abzuwarten, die eingereichten drei Dramen drucken, denen er noch zwei neue hinzufügte. Sie erschienen 1817 zu Hermannstadt unter dem Titel *Fünf Trauerspiele, geschrieben von einem Patrioten.* Der Name des Verfassers war nicht angegeben, vielmehr hatte Wolfgang, um die Leute irre zu führen, unter den 178 Subskribenten seinen eigenen Namen verzeichnet. Die Titel der Dramen sind:

1. *Pausanias oder das Opfer des Ehrgeizes,*
2. *Mohamed oder der Sieg des Ruhmes über die Liebe,*
3. *Simon Kemény oder das Opfer der Vaterlandsliebe,*
4. *Der Sieg der Tugend über die Liebe,*
5. *Der Sieg der Liebe über die Tugend.*

Die Verkündigung des Urteils erfolgte am 8. Juli 1817. Die Jury erklärte, daß sie den Preis keinem der eingereichten Stücke erteilen könne. Jedoch verdiene das Trauerspiel: *Das Feuer des Aufstandes* von Johann Tokody besondere Beachtung; über die Höhe des ihm zu erteilenden Preises solle jedoch erst entschieden werden, wenn der Verfasser das Drama umgearbeitet habe. Dazu ist es nicht gekommen, und so blieb der Preis unverteilt.

Über Wolfgangs Stücke äußerten sich die Preisrichter folgendermaßen. „Den Charakter dieser Werke bildet die Größe der darin vorkommenden, überraschenden Gedanken, die sanfte, warme Empfindung, die mit Kühnheit geparte, zerfließende Phantasie. Keinem der Mit-

bewerber ist eine solche poetische Sprache eigen wie die seine. Nur schade, daß sie hier und da zu üppig, ungeläutert und nicht knapp genug ist. ... Er trug keine Sorge dafür, den dramatischen Knoten so zu schlingen, daß die Aufmerksamkeit des Lesers zu unruhiger Begierde hingerissen werde. Darum hat der Knoten keine Mitte, keine Lösung, und darum ist sein Werk überall glatt."

Ganz unbeachtet ließen die Preisrichter das Trauerspiel *Banus Bánk* von Josef Katona (1792—1830), das denselben Stoff behandelt wie Grillparzers *Ein treuer Diener seines Herrn* (1830); es hat erst nach dem Tode des Dichters die verdiente Anerkennung gefunden und gilt noch heute als die beste und ursprünglichste magyarische Tragödie.

Wenn Wolfgangs Stücke auch nicht auf die Bühne kamen, so haben sie doch für die Geschichte des magyarischen Dramas eine gewisse Bedeutung gewonnen, denn für Karl Kisfaludys (1788—1830) bestes Trauerspiel *Irene* (1820) ist Wolfgangs Drama *Mohamed* der Ausgangspunkt geworden. Irene ist eine schöne griechische Gefangene, die vom Sultan Mohamed geliebt wird. Um das Schicksal der Christen zu mildern, verzichtet sie auf ihren Verlobten und gibt sich dem Sultan hin. Seitdem sie ihn beherrscht, hören die Metzeleien auf. Allein die Anhänger der Kriegspartei wissen den Sultan zu überzeugen, daß die Griechin nicht aus Liebe, sondern nur aus Berechnung handle, und in seiner Wut ersticht er sie.

Im Jahre 1818 ließ Wolfgang ein neues Stück folgen: *Der Pariser Prozeß, ein empfindsames Spiel in fünf Aufzügen.* Auch erschien von ihm in demselben Jahre ein Band Übersetzungen deutscher und englischer Dichtungen; man findet hier zunächst ein didaktisches Gedicht, Popes *Essay on man* (1733), dann einzelne Gedichte von Milton, Thomson, Gray und Schiller. Bei der Übersetzung gestattete sich Wolfgang große Freiheiten; zum Beispiel hat er den Schluß von Schillers *Resignation* verändert: „es war eine vorübergehende Sonnenfinsternis in seinem [Schillers] inneren Himmel" (Brief an Sartorius von Waltershausen vom 13. Juli 1856).

Was Wolfgang sonst noch an poetischen Entwürfen aufgezeichnet hatte, verbrannte er um das Jahr 1836 zur Zeit der Cholera. „Armut, Mangel an Zeit und Ruhe, sowie unvorhergesehene Abhaltungen brachten mich in einer trüben Stunde dazu, mehrere neue Trauerspiele und noch andere Arbeiten (um das Jahr 1836) zu verbrennen; noch bebewahre ich ihre Asche. Sie waren auch noch nicht ausgefeilt. Ich sah ein, daß ich sie verbrennen müßte, wollte ich dieser Geliebten wegen nicht zu viel Zeit verlieren, ohne meinem wahren Kameraden, der Mathematik, untreu zu werden. Ich bedachte ferner, daß ich leicht

etwas anderes schreiben könnte, wenn es mir später die Zeit erlaube; denn damals stand ich so, daß ich bei der nötigen Freiheit und bei besserer äußerer Lage beinahe jeden Monat in Prosa ein solches Drama hätte schreiben können."

Hören wir noch, was Bedőházi, Wolfgangs magyarischer Biograph, über ihn als Dichter sagt: „Der Hauptgesichtspunkt ist bei ihm ein vorwiegend ethischer, er verfolgt den entschiedenen Zweck, den Leser nicht nur zu entzücken, sondern ihn vor allem zu belehren und zu bessern. Er selbst sagt im Vorwort des empfindsamen Spiels *Der Pariser Prozeß*, es enthalte auch dieses Drama «lange und äußerst lehrreiche Gespräche». Wer auch immer darin spricht, läßt die Stimme des Dichters durchklingen. Bei ihm scheint die dramatische Form mehr als Mittel dafür zu dienen, seine in Dialoge gekleideten, schönen, erhabenen Gedanken, seine packenden, schillernden Vergleiche, seine Bilder, seine sittliche Weltanschauung in seiner überaus üppigen Sprache mitteilen zu können. Diese Sprache vergleicht Sartorius von Waltershausen nach den wenigen ihm vorliegenden Blättern [Briefen an Gauss und ihn selbst] mit der originellen Ausdrucksweise und dem Stil Jean Pauls. Ebenso sehen wir, daß Bolyai in der späteren Ausgabe der *Elemente der Arithmetik* [*Arithmetika eleje*, Maros-Vásárhely 1850], wo er zur Bezeichnung gewisser Operationen die astronomischen Zeichen der Venus, des Saturn und des Halbmonds benutzt, auch hier, wie überall, wo sich eine Gelegenheit zu Vergleichen und Bildern ergibt, sofort aus dem Rahmen des Üblichen heraustritt. ... Diese Ausdrucksweise war keine gesuchte; in dieser Form trug er vor, unterhielt er sich, schrieb er Briefe und dachte er. ... Seine dichterische Sprache entzückte auch die Kritiker. Sie heben hervor, daß sie, wenn man nur die Größe der Gedanken berücksichtige, kein besseres Werk in der dramatischen Literatur Ungarns kännten. Der Reichtum an Gedanken und die schwungvollen Dialoge waren es, die ihm ein Publikum schufen, und nach dem Zeugnis Samuel Brassais «liebten und bewunderten ihn die Leser in gleicher Weise». ... Bolyais Trauerspiele, obwohl von zweifelhaftem literarischen, noch weniger von Bühnenwert, enthalten vieles, was die Äußerung eines Kritikers rechtfertigt, «die fünf Tragödien seien auch trotz dieser Mängel ungereihte orientalische Perlen» (Döbrentei)."

Als Kaiser Franz Josef bei einer Reise nach Siebenbürgen im Jahre 1852 nach Maros-Vásárhely kam, besuchte er am 31. Juli auch das Kollegium. Als Vertreter des Lehrkörpers begrüßte Wolfgang den Kaiser mit einer Ansprache und überreichte ihm als Huldigungsgruß, in schwarzen Sammt gebunden, eine Sammlung von lateinischen, deutschen und magyarischen Gedichten, die er verfaßt hatte, den *Schwanengesang des greisen*

Poeten, wie er selbst gesagt hat. „Die Professoren stellte Bolyai einzeln vor, sich selbst auslassend. Und wer sind Sie? fragte der Herrscher. Ich bin der Professor der Mathematik und Physik, antwortete Bolyai, indem er seinen Namen verschwieg“ (Bedőházi).

Auch der musikalischen Begabung Wolfgangs muß hier gedacht werden. Sein Sohn Gregor erzählte oft, daß in der Kindheit und Jugendzeit die im Hause gehörte Zigeunermusik keinen Eindruck auf Wolfgang gemacht habe. „Aber in Göttingen nach dem Besuch der ersten Oper wurde ihm die Musik und besonders die Violine so lieb, daß er am folgenden Tage zu einem Violinlehrer ging, um bei ihm Stunden zu nehmen. Der Lehrer wies darauf hin, daß er über die Zeit des Violinelernens hinaus sei, weil er sich die notwendige Geläufigkeit nie aneignen könne, und wollte ihn nicht als Schüler annehmen. Der Wunsch war aber in Wolfgang so heftig, daß er nicht nachließ und vom Lehrer forderte, er möge seine Pflicht erfüllen und den Lernbegierigen für sein Geld unterrichten. Als der Lehrer sich von dem begeisterten jungen Manne nicht losmachen konnte, gab er ihm endlich regelmäßige Stunden. Seine Mühe war nicht erfolglos, denn sein Schüler brachte es bald so weit, daß er Stücke, die keine übermäßige Schnelligkeit erforderten, mit starkem Takt und großer Genauigkeit spielen konnte. ... Als junger Professor vertauschte er die Violine mit der geringere Gewandtheit erfordernden Bratsche, auf der er sich so sehr einübte, daß er im Orchester und in schweren Quartetten seine Stimme genau abspielte. Sein Sinn für Musik, sein Geschmack und sein Urteil waren so weit ausgebildet, daß — wie behauptet wird — bis in die höchsten Regionen der Musik keine terra incognita für ihn vorhanden war.“

Gewiß, Wolfgang war eine echte Künstlernatur. Aber in seinem umfassenden Geiste war noch Raum für Dinge, die an der entgegengesetzten Seite des Lebens liegen. Kaum war sein Eifer für das Drama erloschen, so wandte er sich einer sehr praktischen und sehr prosaischen Aufgabe zu. Eine von der österreichischen Regierung in Wien eingesetzte Kommission beschäftigte sich mit der Konstruktion sparsamer Öfen, ohne jedoch damit Erfolg zu haben. Dies erfuhr Wolfgang und machte sich sogleich mit dem ihm eigenen Eifer ans Werk. Nach langen, mühsamen Versuchen kam er wirklich ans Ziel. Der von ihm erfundene *Bolyai-Ofen*, der auf demselben Gedanken beruht wie die neueren Regenerationsöfen, ist in Siebenbürgen vielfach in Gebrauch gewesen. Daß Wolfgang Sinn für Aufgaben hatte, die in das Gebiet der Technik übergreifen, zeigt auch ein Brief an Gauss vom 11. September 1802: damals hatte er sich mit der Frage beschäftigt, wie er am besten Wasser aus einem Brunnen in den höher gelegenen Garten treiben könne. In den dreißiger Jahren

erfand er, wie Josef Koncz berichtet, einen Wagen, den der Fahrer selbst in Bewegung setzen konnte, also eine Art von Draisine, den er aus Stücken einer alten Kalesche zusammensetzte. Auf einem Gestell, erst mit drei, später mit vier Rädern, stand ein Häuschen mit einer Tür an der Rückseite, „damit man, falls der Wagen durchgehen sollte, gefahrlos herausspringen könne". Darin befand sich ein Tisch, ein Stuhl und sogar ein kleiner Herd mit Schornstein. Mit diesem Fahrzeug machte er Ausflüge in die Umgegend.

Immer aber trieb ihn sein ruheloser Geist zu neuen Dingen. Im Jahre 1820 war in Hermannstadt der Forstinspektor von Siebenbürgen, Athanasius v. Guilleaume, gestorben. Nach seinem Tode wurde durch Gubernialreskript bewilligt, daß die Stelle in Zukunft durch einen eingeborenen Siebenbürger besetzt werden solle. Sie war für die damalige Zeit recht einträglich; zu einem Gehalt von 1500 rheinischen Gulden in Silber kamen beträchtliche Nebeneinnahmen in bar und in natura. Daß Wolfgang bei seinen geringen Einkünften seine Lage gern verbessern wollte, ist erklärlich. Allein nur wenige wären im Stande gewesen wie er, um sich für die Stelle geeignet und würdig zu zeigen, in kurzer Frist vierzig Bücher über das Forstwesen durchzuarbeiten und auf Grund der erlangten Kenntnisse sogleich ein Werk über diesen Gegenstand zu verfassen, das erste magyarische in diesem Fache. Es ist freilich in seinem Pulte liegen geblieben, denn trotz der Vermittlung einflußreicher Personen gelang es ihm nicht, die Stelle zu erhalten. Sie ist vielmehr im Jahre 1822 an Ignaz Ráth verliehen worden, einem Manne, über den sonst nichts bekannt ist.

Wenn Wolfgang in den zwanziger Jahren sich der Mathematik wieder zugewandt hat, so verdanken wir das im Grunde seinem Sohne Johann, dessen mathematisches Genie zu dieser Zeit auf seiner höchsten Höhe stand. Wolfgang vollendete jetzt sein schon erwähntes großes Lehrbuch, das *Tentamen*. Die Erlaubnis zum Druck wurde am 12. Oktober 1829 erteilt, allein die großen Schwierigkeiten, die sich dem Druck in der kleinen und mangelhaften Werkstätte des Kollegiums entgegenstellten, sowie auch der Mangel an Geldmitteln, verzögerten das Erscheinen, sodaß der erste Teil erst 1832, der zweite erst 1834 herausgekommen ist.

Dem *Tentamen* war ein kleineres Werk über die Elemente der Arithmetik in magyarischer Sprache vorausgegangen (Maros-Vásárhely 1830); eine zweite verbesserte Ausgabe ist 1843 erschienen. Diesem Buche folgte eine Bearbeitung des Tentamen in magyarischer Sprache, von der jedoch nur der erste Band fertig wurde (Maros-Vásárhely 1834). Ferner sind zu nennen zwei kleine Handbücher der elementaren

Arithmetik und Geometrie (Maros-Vásárhely 1850 und 1851). Den Abschluß bildet endlich ein kleines Buch in deutscher Sprache, der *Kurze Grundriß eines Versuches* (Maros-Vásárhely 1851), das man als eine Darstellung der Grundgedanken in den beiden Bänden des *Tentamen* bezeichnen kann; es war gewissermaßen Wolfgangs mathematisches Testament.

Nur die Hauptpunkte in Wolfgangs langer, unermüdlicher Tätigkeit konnten im Vorhergehenden berührt werden. Das Gesagte wird jedoch genügen, um einen Begriff von seiner Eigenart zu geben. Wie er vor den Augen derer stand, die ihn noch persönlich gekannt hatten, schildert uns Bedőházi: „Wenn uns unsere Phantasie ein Bild von Wolfgang entwirft, so sehen wir immer die mittelgroße, hagere und dabei etwas gebückte Gestalt eines alten Mannes mit freundlich lächelndem, länglichem, glatt rasiertem Gesicht und dem gescheitelten, bis auf die Schultern herabfließenden, langen Haar. Wir sehen um seine Lippen einen eigentümlichen Zug trüben, milden Kummers und in seinen leuchtenden Augen das volle, tiefe Feuer. Wir können uns vorstellen, wie er auf dem Katheder in seinem schwarzen, etwas abgeschabten Anzug erschien, in langschäftigen Stiefeln, den langen, blauen Mantel über seine Schultern geworfen und in der Hand den breiträndrigen Hut. Als ob wir sein Hüsteln und seine heisere Stimme hörten, die erst im Feuer des Vortrags erwärmt ihren vollen Klang wiedergewinnt. Dann sehen wir ihn wieder daheim, in seine Gedanken und Zahlen vertieft, im weißen Flanellwams an dem Tisch sitzend, den grünen Schirm über den Augen, und hören das aufgeregte Kritzeln der Feder, unter der sich seine Buchstaben zu kaum lesbaren Zeilen gestalten, weil die Hand mit den Gedanken nicht um die Wette zu laufen vermag.“

V. Kapitel

Wolfgang Bolyai als Mathematiker

Erster Teil: Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos introducendi

Wolfgang Bolyais Wirksamkeit als mathematischer Schriftsteller ist eher noch geringer gewesen als die des Lehrers. Seine Bücher haben in der Heimat keine Anerkennung gefunden und sind im Auslande so gut wie unbekannt geblieben, und wenn ihm nach seinem Tode Ehren aller Art erwiesen worden sind, so werden doch seine mathematischen Schriften immer nur von wenigen gelesen und von noch wenigeren gewürdigt werden. Wolfgang teilt dies Schicksal mit den meisten der Männer, die man als *Vorläufer* bezeichnen könnte, im Gegensatz zu den an äußeren Erfolgen reicheren Nachläufern, die das, was die großen Entdecker gefunden haben, aufnehmen und der Menge zugänglich machen. Er hat erkannt, daß für die Mathematik eine neue Zeit heraufkomme, aber wie Moses hat er das gelobte Land nur vom hohen Berge aus schauen und nicht betreten dürfen. Er hat die Unzulänglichkeit des Vorhandenen lebhaft gefühlt, aber die Mängel nicht deutlich aufzeigen und noch weniger sie beseitigen können. Er ist manchen wichtigen Fragen, mit denen die späteren Mathematiker sich beschäftigt haben, sehr nahe gekommen, aber er hat es nicht vermocht, diese zu ergreifen, festzuhalten und zu bewältigen.

Das Hauptwerk Wolfgangs ist das *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris, ac sublimioris, methodo intuitiva evidentiaque huic propria, introducendi*, das in zwei Teilen mit den Jahreszahlen 1832 und 1833 zu Maros-Vásárhely erschienen ist, *typis collegii reformatorum*. Es ist schon erzählt worden, daß die Grundgedanken des *Tentamens* bis auf Wolfgangs Aufenthalt in Jena (1796) zurückgehen und die Übernahme der Professur in Maros-Vásárhely den Anstoß zur Ausführung „des Systems“ gegeben hat; aber erst nach langwieriger, oft unterbrochener Arbeit ist im Jahre 1829 ein vorläufiger Abschluß erreicht worden. „Die stürmischen Wellen des Lebens ließen das Genie nicht erschlaffen, drückten es nicht nieder, sondern stählten und steigerten im Gegenteil die Kraft des Professors, der beinahe mit den alltäglichen Bedürfnissen des Lebens zu kämpfen hatte und daheim am häuslichen Herde fortwährend gestört und geplagt war. Der Wind bläst die kleine Flamme aus, aber er entfacht die große“ (Koncz).

Die Aufforderung zur Vorausbestellung ist vom 4. Mai 1829 datiert; sie verdient hier (in deutscher Übersetzung) Platz zu finden.

„Nachdem die Buchdruckerei unseres Kollegiums in Stand gesetzt worden ist, beabsichtige ich folgendes Werk mit den soeben angekommenen Typen, mit denen auch diese Aufforderung gedruckt ist, herauszugeben:

„Tentamen Systematis elementorum Matheseos purae (elementaris, ac sublimioris) demonstratae cum Appendici triplici. In usum studii proprii accommodatum.“

„Der Grund, warum ich dieses Werk hier herausgebe, ist der, daß es unter meiner eigenen Aufsicht gedruckt um so weniger Fehler habe.“

„Mein Zweck ist, den Jünglingen ein solches Kompendium zu geben, wie ich es mir selbst gewünscht hätte, in dem

1. Die Axiome vorweg klar vorgetragen werden und dann alles, was zum Fortgang der Wissenschaft notwendig ist, streng bewiesen wird,

2. Die Begriffe, mit den einfachsten beginnend, so zusammengestellt werden, wie sie entstehen, bis zu jener Sphäre, die das Wesen der Sache erfordert.

3. Alles möglichst einfach, kurz und handgreiflich vorgetragen wird, und zwar so, daß die Schwierigkeit sowohl im Finden der reinen Wahrheit wie im Anwenden (auf Geometrie und Mechanik) dadurch erleichtert wird, daß einerseits der natürliche Weg zum Höheren (wie des *calculus differentialis, integralis, variationum*) gefunden ist, andererseits das Schwierigere bei den niederen Gegenständen auch nicht mit Leichtfertigkeit übersprungen wird. Was zum Wesen des Systems gehört, ist alles gleichmäßig wichtig; es ist da nichts klein, nichts groß, alles hat gleiches Anrecht auf Beachtung.

4. Das Gebäude soll sich aus den untersten Fundamenten anschaulich emporheben, bis es in den Feuerkränzen des Himmels ins Bodenlose verschwindet, damit der Jüngling sehe, wie der Verstand, wann immer, wo immer und unter welchem Namen immer es geschehen sein möge [(immerhin] gehört es [ja] dem menschlichen Geschlecht an), bis zum Höchsten emporgestiegen ist und nicht blindlings erstaune.“

„Meine Hoffnung ist, daß der Jüngling durch dieses [Werk], das ich unter günstigeren Umständen besser hätte hervorbringen können, mit Ersparnis von viel Zeit und Kraft in die niedere und höhere Mathematik gründlich eingeführt wird, sodaß er, einenteils, auch wenn er kein Mathematiker von Beruf wird, überall klare und bestimmte Vorstellungen suchen, sich nicht mit der Oberfläche begnügen und gründlich urteilen wird, und daß er anderenteils auch imstande sein wird, von jenem äußeren Licht zurückzugeben, mit dem wir wie Halbmonde

dämmernd hineinleuchten in diese vom Morgenrot noch weit entfernte Nacht."

„Der Anhang besteht aus Gegenständen, die zu lehren im Jahrgange der angewandten Mathematik und Physik keine Zeit bleibt und die ich also in den Jahrgang der Mathematik verlegte. Es sind die Perspektive, die Gnomonik und die Chronologie; hier werden durch den genauen Nachweis gewisser, nicht sehr leichter Dinge leichte, einfache Regeln gegeben."

„Beispiele sind nur soviel vorhanden, als es zum Verständnis notwendig ist; man kann sie überall bekommen. Auch so muß das Werk in zwei Bände gebunden werden. Die Zahl der Tafeln ist groß. Auch mußten Zeichen bestellt und neue gegossen werden. Deswegen ist der Preis der Pränumeration 2 Rheinische Gulden 30 Kreuzer in Silber."

„Sobald genug Pränumeranten gesammelt sein werden, wird der Druck in Angriff genommen und fortgesetzt werden. Die Pränumeranten werden ihre Exemplare von dem, der die Pränumeration sammelt, richtig erhalten."

„Wenn aber zu Ende des Schuljahres [Mitte Juli] nicht genug Geld gesammelt sein wird, so bekommt jeder Pränumerant sein Geld von dem zurück, dem er es gegeben hat."

„Es tut mir leid, daß ich dieses Werk nicht magyarisch herausgeben kann; teils darum, daß man gute, das Wesen der Sache wirklich ausdrückende Kunstausdrücke einführen könnte, die besser wären als die üblichen Ausdrücke der anderen Sprachen, teils darum, weil ich glaube, daß die Mathematik (die Tochter des Himmels) bei uns beliebter werden möchte, wenn sie in unserer Muttersprache vorgetragen würde. Jedoch habe ich dieses Werk schon vor langer Zeit lateinisch niedergeschrieben und habe jetzt keine Zeit, es zu übersetzen. Dieser meiner Pflicht gegen das Vaterland werde ich in anderer Weise Genüge tun."

Während der kurzen Zeit von Anfang Mai bis Mitte Juli 1829 gingen keine Pränumerationen ein; der Verkehr in Siebenbürgen war damals so langsam, daß die Aufforderung während dieser Frist die entfernteren Teile des Landes noch gar nicht erreicht hatte. Deshalb wurde die Pränumeration um ein Jahr verlängert. „Wenn es unmöglich sein wird", schreibt Wolfgang im Vorwort zu den 1830 veröffentlichten magyarisch geschriebenen *Elementen der Arithmetik*, „meinen Vorsatz bis zum 1. Juli auszuführen, so werde ich aufhören, in die Wüste hinauszuschreien, und mich beim Licht des auf Daziens Hügel scheinenden Mondes in den allgemeinen Schlaf zurückbegeben. . . . Bis zum letzten Funken der Hoffnung will ich nicht entsagen. Mit der kleinen Summe, die aus diesem Werke fließen könnte, wollte ich die Pränumerationen

ergänzen, damit ich durch den Bau des einen Hauses nicht das andere niederreiße."

Im Mai 1830 war die Zahl der Pränumeranten noch sehr klein. „Ich würde das Lateinische Werk beginnen", klagt Wolfgang in einem Briefe vom 26. Mai 1830 an seinen Schüler Peter Bod in Wien, „aber die Kosten des ungarischen [Elemente der Arithmetik] sind bloß zum sechsten Teil hereingekommen, und für das lateinische [Werk] habe ich nur wenige Pränumeranten. Bitte, sammeln Sie ein, was da ist, und vermehren Sie die Zahl der Pränumeranten wenn möglich, damit das Werk dem schadenfrohen Schreien der Welt zum Trotz herauskommt."

Wie das Verzeichnis am Schluße des ersten Bandes zeigt, waren schließlich 127 Exemplare bestellt worden, größtenteils vom siebenbürgischen Adel. „Ich wollte den zweiten Band magyarisch herausgeben", äußert sich Wolfgang in einem magyarisch geschriebenen Anhange zum ersten Bande, „einerseits weil der erste Band inbegriffen den Schaden bei der *Arithmetika eleje* alle Gelder verschlungen hat und ich also, um den zweiten herausgeben zu können, diesen verkürzen, ihn auf billigerem Papier und bloß in 300 Exemplaren statt in 500, wie den ersten, drucken lassen muß; auch 300 ist zu viel für uns. Andererseits hoffte ich meinem Vaterlande auf diese Weise ein gemeinnütziges Buch zu bieten, zu dem dann auch der erste Band in magyarischer Sprache gepaßt hätte; allein von meinen Pränumeranten wünschten mehrere, deren Rat ich nicht mißachten konnte, daß auch der zweite Band lateinisch sei, wenn es der erste ist."

„Das Publikum", schreibt Bedőházi, nahm Bolyais *Tentamen* so auf wie seiner Zeit Klopstocks *Messias*. Viele sprachen davon, wenige kannten es. Man wußte, daß es das große Werk eines großen Mannes sei, ahnte jedoch nicht, worin diese Größe bestehe. Auch die *Ungarische Gelehrte Gesellschaft* [die spätere Akademie] wählte ihn nicht auf Grund dieses Werkes zum korrespondierenden Mitglied ihrer mathematischen Klasse. Die Wahl fand noch vor dem Erscheinen des *Tentamens* am 9. März 1832 statt, und es führten eher unmittelbare Erfahrungen und Bekanntschaften einzelner Persönlichkeiten dazu, daß er als Gelehrter von großem Rufe in die Reihe der Akademiker aufgenommen wurde."

Vielleicht urteilt Bedőházi noch zu günstig über die Aufnahme, die das *Tentamen* fand; denn Wolfgang schreibt darüber den 20. April 1835 an Gauss: „Hier schreit alles dawider, ausgenommen meine Schüler, die mit Zeitersparung glücklich fortkommen. . . . Kein Gedanke, daß jemand sonst [außer den Pränumeranten] so was kaufe; selbst

meinen Schülern (wenn sie arm sind) schenke oder leihe ich, nur daß sie lernen. So stehen wir noch. ... Wenn der schlechte (obgleich genug große) Druck Deine Augen (Kleinodien des Tempels der Wahrheit) nicht angriffe und die darauf verwandte Zeit nicht ein Kirchenraub wäre, so würde ich es wagen, Dich um Dein Urteil zu bitten, obwohl ungeachtet aller Fehler (welche ich mit derselben Wahrheitsliebe dargestellt zu sehen wünschte) der natürliche Gang eines mit unglaublich wenigen Vorkenntnissen Forschenden etwas Aufmerksamkeit verdient, während sonst selbst das Gute, was darinnen sein soll, von niemanden (außer meinem Sohn) gewürdigt wird." Und in dem Briefe an Gauss vom 3. Oktober 1836 heißt es: „Mathematik braucht hier niemand: nur wenige von meinen Schülern haben echten Sinn davon — ich benutze mein Werk zu Makulatur zum Verpacken u. d. gl. ... Ein Index, wie die Mathematik bei uns steht, ist, daß jetzt ein ungarisch herausgegebenes Werk von den Anfangsgründen der Arithmetik und Algebra [von Karl Nagy] von der Gelehrten Gesellschaft zweihundert Dukaten zum Lohne erhalten hat, obwohl das Werk keinen anderen Verdienst hat, als daß es in Wien schön und korrekt gedruckt worden ist: nicht die mindeste Originalität, kein Scharfsinn, nichts ins Reine gebracht, kein Strahl von Strenge, sehr wenig an Gehalt, es ist nicht nur mittelmäßig, sondern schlecht; ich wollte nicht, daß ein werdender Mathematiker daraus lerne; es ist auch kein gutes Kunstwort, alles sklavisch übersetzt. — Jedoch freue ich mich, weil es schon ein Betreten der ersten Stufe ist; ein Jahrhundert, und es wird (wenigstens kann) aus der ersten die tausendste werden. Ich habe hier nicht[s] mehr zu hoffen; ich stehe schon in den aufgehenden Strahlen der Ewigkeit, an welchen diese wie in der Nacht leuchtende Erde zu einem dunklen Punkte wird, und der Tautropfen Zeit verschwindet. — Es beruhigt mich, so wenig es auch sei, so viel getan zu haben, als ich in meinen Umständen konnte."

Eine um so größere Freude wird für Wolfgang die Anerkennung gewesen sein, die das *Tentamen* bei Gauss gefunden hat. „Für das Exemplar Deines mathematischen Werkes", schreibt dieser am 23. Oktober 1836, „danke ich bestens. Ich habe mit Vergnügen das redliche Bestreben bemerkt, überall Gründlichkeit und Selbständigkeit zu behaupten. Leider ist nur im Publikum sehr wenig Sinn für solche Bestrebungen. Den meisten Menschen ist das Oberflächliche das Liebste; auch fürchte ich, daß bei Deinem Buche mancher durch die Forderung, sich erst mit manchen neuen Bezeichnungen bekannt zu machen, abgeschreckt werden wird." Daß Gauss dem Werke des Jugendfreundes Beachtung und Wertschätzung zuteil werden ließ, zeigt auch der Bericht eines Landsmannes von Wolfgang, Franz Mentovich, der am 1. September

1843 Gauss in Göttingen besucht hatte. Darin heißt es: „Als ich ihm mitgeteilt hatte, daß ich Siebenbürger sei, fragte er sogleich mit Interesse, ob ich über seinen siebenbürgischen guten Freund, Professor Bolyai, nicht neuere Nachrichten habe, als mein siebenbürgischer Landsmann, Professor Szász, der ihn einige Zeit vor mir besucht hatte. ... Das mathematische Werk unseres Bolyai erblickte ich in der kleinen Bibliothek neben Gaussens Arbeitstisch, wo allem Anschein nach nur von bevorzugteren Schriftstellern verfaßte und mehr als Handbücher gebrauchte Werke standen. Aus jedem Worte des vortrefflichen Mannes war ersichtlich, daß er unseren Bolyai nicht nur als seinen Freund verehrt, sondern auch seine wissenschaftlichen Verdienste hochschätzt." Gauss hat auch seinen Schüler und Freund Gerling, Professor an der Universität Marburg, auf das *Tentamen* hingewiesen, und Gerling ist mit Wolfgang in Briefwechsel getreten; leider scheinen die Briefe Wolfgangs verloren gegangen zu sein.

Nachdem das *Tentamen* auf dem Büchermarkte allmählich zu einer Seltenheit geworden war, beschloß die Ungarische Akademie eine neue, des Verfassers würdige Ausgabe zu veranstalten; der erste von Julius König und Moritz Réthy herausgegebene Band ist 1897, der zweite, von Josef Kürschák, Moritz Réthy und Béla v. Tőtössy besorgte Band 1904 erschienen.

Dem ersten Bande des *Tentamens* ist auf einem besonderen Blatte ein *Baum der Arithmetik und Geometrie* beigegeben, in dem Wolfgang sein „System" in den Grundzügen dargestellt hat; man findet eine deutsche Übersetzung des *Baumes* auf S. 110—118 des zweiten Teiles dieses Buches. „Von den inneren und äußeren Vorstellungen"; so beginnt Wolfgang, „gelangt man auf dem Wege der Abstraktion zu den Urständen von jeglichem, was in der äußeren Welt vorhanden ist und und was in der äußeren und inneren Welt geschieht, zu Raum und Zeit, die wir teils gesondert, teils vereinigt betrachten. Wird nämlich von der äußeren Welt jeder Körper von dem Ort, den er einzunehmen scheint, weggenommen und fragt man, was übrig bleibt, oder was darüber hinaus noch existiert, so entsteht die *Anschauung des reinen Raumes*, und wenn sich dasselbe an verschiedenen Orten oder Verschiedenes an demselben Orte befindet, oder wenn verschiedene Vorstellungen in demselben vorstellenden Wesen auftauchen, so entsteht die *Anschauung der Zeit*." Der Raum ist der Gegenstand der *Geometrie*, die auf die Form der Zeit zurückgeführte Größe der Gegenstand der *Arithmetik*, „sodaß die aus gemeinsamer Wurzel hervorgewachsenen Bruder-Bäume, indem der eine dem anderen Hilfe bringt, mit ihren Wipfeln zwischen den leuchtenden Bahnen der ewigen Ehe von Raum und Zeit in der unend-

lichen Tiefe des Himmels zusammenfließen"; dieses Zusammenfließen aber vollzieht sich in der *Mechanik*.

Wenn Wolfgang mit diesen Auffassungen ganz auf dem Boden der Kantischen Philosophie steht, die er während seines Aufenthaltes in Deutschland kennen gelernt hatte, so folgt er dem Königsberger Philosophen auch darin, daß er auf die Architektonik des Aufbaus großen Wert legt. Nicht ohne eine gewisse Gewaltsamkeit sucht er zwischen Arithmetik und Geometrie einen Parallelismus herzustellen. Hierin liegt zugleich, daß er, im Gegensatz zu der weit bis ins 19. Jahrhundert hinein üblichen Vermischung, jede dieser beiden Wissenschaften selbständig zu begründen sucht; freilich ist es ihm nicht gelungen, die Trennung folgerichtig durchzuführen. Sehr bezeichnend für sein Bestreben ist eine Äußerung, die sich in dem Bericht über Gaussens ersten Beweis für die Existenz der Wurzeln algebraischer Gleichungen findet. Nachdem er mit begeisterten Worten Gaussens Dissertation als die „Erstlingsfrucht reichster Ernte" gelobt hat, fühlt er sich doch in seinem mathematischen Gewissen verpflichtet hinzuzufügen: „freilich geschieht [der Beweis] mit Hilfe der Geometrie: jedoch ist eine Wahrheit mit einer anderen Wahrheit gleichen Geschlechtes." Auf demselben Standpunkt steht auch Wolfgangs Sohn Johann, jedenfalls unter dem Einfluß seines Vaters; mit Recht hat dieser gegen Gaussens Theorie der imaginären Größen eingewendet, daß die darin verwendeten Begriffe von *rechts* und *links*, von *oben* und *unten* nicht bestimmt genug seien und überhaupt in der Arithmetik die Berufung auf die Geometrie vermieden werden müsse.

Der selbständige Aufbau der Arithmetik findet seine Krönung in der neueren Lehre von den Irrationalzahlen. Wolfgang hat die hier vorliegenden Schwierigkeiten umgangen, indem er, gestützt auf Kant, die Zeit als den Träger der stetig veränderlichen *Größe* ansieht, die er scharf von der diskreten *Zahl* unterscheidet. Das Hereinziehen der Zeit, das sich auch bei anderen Mathematikern der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, z. B. bei Hamilton, findet, bildet einen bemerkenswerten Übergang von der geometrischen zur rein arithmetischen Begründung des Begriffs einer stetig veränderlichen Größe; eine eingehendere Untersuchung dieser Bestrebungen, die bis jetzt wenig beachtet worden sind, würde sich sicherlich lohnen.

Über die Untersuchungen Wolfgangs, die sich auf die Grundlagen der Geometrie beziehen, wird im nächsten Kapitel ausführlich berichtet werden. Hier möge es genügen, nur noch auf einige besonders wichtige Stellen aus der Arithmetik einzugehen. Wer tiefer in die Gedankenwelt des *Tentamens* eindringen will, wird gut tun, zunächst den *Kurzen*

Grundriß vom Jahre 1851 vorzunehmen, in dem Wolfgang eine Übersicht über den Inhalt seines Hauptwerkes gegeben hat; das jetzt selten gewordene Schriftchen ist im zweiten Teile dieses Buches, S. 119—179, vollständig abgedruckt worden.

Mit großer Sorgfalt hat Wolfgang die Lehre von den positiven und negativen rationalen Zahlen entwickelt, und hier genügt seine Darstellung im Wesentlichen den Forderungen an Strenge, die von der neueren Axiomatik gestellt werden. Um die negativen Zahlen zu gewinnen, wird z. B. neben der ursprünglichen Einheit „+ 1“ eine neue Einheit „− 1“ eingeführt. Durchdrungen von der Bedeutung dieses Gedankens hat Wolfgang im Gegensatz zu den Zeichen für das Hinzufügen und Wegnehmen „+“ und „−“ für die positive und negative Einheit zwei besondere Zeichen „⊢ 1“ und „⊣ 1“ eingeführt. In der Tat liegt in der doppelten Bedeutung der Zeichen + und −, die sowohl Zeichen der Addition und Subtraktion als auch Zeichen bei positiven und negativen Zahlen sind, eine wirkliche Schwierigkeit, die man in neuerer Zeit nach dem Vorgang von Hankel vermeidet, indem für die Operationen des Addierens und Subtrahierens zunächst neue Zeichen, zum Beispiel ⌢ und ⌣, eingeführt werden. Hinterher wird dann gezeigt, daß es zulässig ist, an ihrer Stelle die Zeichen + und − zu verwenden; denn mögen die neuen Zeichen für die Begründung der Lehre von den negativen Zahlen ihren Nutzen haben, so empfiehlt sich doch, diese Fesseln bald wieder abzustreifen, damit die Darstellung nicht schwerfällig und allzubreit wird.

Auch bei den imaginären Größen suchte Wolfgang besseres als seine Vorgänger zu bringen. Wie sehr ihn gerade dieser Gegenstand beschäftigt hat, zeigt die Vorrede zum zweiten Bande des *Tentamens*, worin es heißt: „Als ich den reinen Imaginären allein nach meiner eigenen Überzeugung einen Sinn zu geben trachtete, da fürchtete ich, mich dem Gelächter auszusetzen. Erst später wurden mir die längst (in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen) herausgegebenen Grundlinien der Imaginären des großen (über mein Lob weit erhabenen) Göttinger Mannes bekannt, zugleich mit seiner Klage über deren [sonstige] Behandlung. Dies gereicht mir zum großen Troste, und ich brauche meine Lehre (die, so gut wie ich sie abfassen konnte, schon gedruckt war) nur solange meinen Schülern vorzutragen, bis jene Lehre [von Gauss] erschienen sein wird. Wenn sie aber erschienen sein wird, so bin ich überzeugt, daß sie den anderen Werken ebenbürtig sein wird, die seinen sicheren, durchdringenden (und beinahe untrüglichen) Verstand durch den ungekünstelten Stempel der Wahrheit verraten; ich aber werde zufrieden sein, wenigstens dasselbe mit einem so großen Geiste gewollt zu haben.“

Grundlegend für Wolfgangs Lehre von den imaginären Größen ist folgende Bemerkung. Er denkt sich jede Größe mit einer Einheit behaftet, deren Wahl noch frei steht, sodaß das Zeichen $\sqrt{a}$ bei geeigneter Wahl der Einheit stets etwas Reelles bedeutet. „Die Einheit wird [von den anderen Mathematikern] willkürlich als positiv angenommen und $\sqrt{-4}$ entbehrt nur wegen der auf dieser Annahme beruhenden Multiplikation der Realität. Wie wäre es, wenn die Einheit negativ gesetzt würde? Dann würden [bei der Multiplikation] die gleichen Vorzeichen offenbar — ergeben und die ungleichen Vorzeichen +. Es sei also erlaubt, die Größen, deren Realität auf der Multiplikation mit der positiven Einheit beruht, *real in bezug auf* $+1$ (oder kurz *real*), die Größen aber, deren Realität auf der Multiplikation mit der negativen Einheit beruht, *real in bezug auf* -1 (oder *rein imaginär*) zu nennen. (Die Quadratwurzel aus $-a$ kann real sein, wenn a z. B. -4 bedeutet.) Größen, die in bezug auf -1 real sind, mögen durch einen darunter gesetzten Punkt bezeichnet werden; z. B. $\sqrt{-4} = \pm 2$, $\sqrt{4} = \pm 2$. Werden reale Größen in bezug auf -1 für sich addiert, und ebenso reale Größen in bezug auf $+1$, und beide Summen miteinander verbunden, so bleiben die Teile unvermischt, bilden aber doch eine Summe. Die so entstandene Größe heißt in (weiterem Sinne) imaginär."

Es ist begreiflich, daß Wolfgang bei der nun folgenden Erklärung der Multiplikation imaginärer Größen auf Schwierigkeiten stößt, und das gilt in noch höherem Grade bei der Division. Die hierauf bezüglichen Auseinandersetzungen sind recht dunkel und stellenweise nicht fehlerfrei. Hervorzuheben ist jedoch, daß Wolfgang in seiner Lehre von den imaginären Größen dem *Prinzip der Permanenz*, das man auf Peacock (1830) und Hankel (1867) zurückzuführen pflegt, schon sehr nahe gekommen ist; die Erklärung der Rechnungsregeln, sagt er, müsse so erfolgen, daß „die Operationen unter dem Segel der Allgemeinheit fortgesetzt werden können und die Allgemeinheit, soweit es möglich ist, nicht verloren gehe."

Aus der naturgemäßen Weiterentwicklung der Gedanken Wolfgang Bolyais über die negativen und imaginären Größen ist Johann Bolyais Lehre von den imaginären Größen hervorgegangen, die einen wesentlichen Fortschritt auf diesem Gebiete bedeutet; im XIV. Kapitel wird hierüber ausführlich berichtet werden.

Wenn auch der arithmetische Begriff der stetig veränderlichen Größe Wolfgang fremd geblieben ist, so hat er doch nach angestrengten Bemühungen den Begriff der *Grenze* mit einer Schärfe erfaßt, die weit über die Auffassung seiner Zeitgenossen hinausging.

In den *Vorbemerkungen* zum *Tentamen* (zweiter Teil dieses Buches, S. 32—34) werden zunächst unter A. einige Axiome und daraus fließende Folgerungen zusammengestellt, „damit es nicht von Fall zu Fall wiederholt zu werden braucht."

Von den Axiomen seien etwa angeführt: Die Zeit ist eine stetige Größe. Jede endliche Zeit, die nicht gewesen ist, wird kommen, alle niemals. Was für einen teillosen Teil p der Zeit gilt, das ist entweder mit dem *Ja* oder mit dem *Nein* von A behaftet. Hieraus wird die Grundlage des apagogischen Beweises erschlossen. Wenn nämlich durch eine Aussage A das *Ja*, durch eine Aussage B das *Nein* desselben C zur Zeit p gesetzt wird, und A gilt, so gilt B nicht, und wenn A nicht gilt, so gilt B.

Unter E. folgt dann die Erklärung des Begriffes der Grenze. „Wenn es feststeht, das an einem Punkte der stetigen Zeit T A vorhanden ist und daß es einmal zur Zeit t hinter T nicht vorhanden ist, so gibt es vom Anfange des ins Unendliche wachsenden T aus einen letzten Punkt p unter jenen Zeitpunkten, von denen die Aussage gilt, daß zwischen ihnen und dem Anfangszustand von T A immer vorhanden ist." Im *Tentamen* selbst heißt es weiter: „Nach p aber gibt es eine stetige, mit p anfangende Zeit, für deren jeden Punkt A nicht vorhanden ist", und hierfür wird eine lange Begründung gegeben. In den *Errata*, die dem Tentamen in den Jahren 1834—1844 hinzugefügt worden sind und die mehr als 60 Seiten umfassen, hat Wolfgang diesen Fehler verbessert: „In p ist aber entweder das *letzte* A", sagt er jetzt, „oder das *erste Nicht-*A, und ist in p Nicht-A, so wird nach p eine Zeit lang entweder immer A oder immer Nicht-A sein, es sei denn, daß hinter p jeder Punkt p' so beschaffen ist, daß zwischen p und p' sowohl A als auch Nicht-A vorkommt. Dies ist die Grundlage der *Grenze*."

Man erkennt hieraus, daß Wolfgang sich allmählig den Begriff der oberen Schranke einer linearen Punktmenge erarbeitet hat, auf dem bekanntlich die strenge Durchführung der in der Analysis auftretenden Grenzprozesse beruht.

In dem *Allgemeinen Grundriß der Arithmetik*, dem ersten Abschnitt der Arithmetik, dessen erste 23 Paragraphen im zweiten Teile dieses Buches, S. 32—48 in deutscher Übersetzung wiedergegeben werden, finden sich Betrachtungen Wolfgangs, die man heute der *Mengenlehre* zuweisen würde. Es sei gestattet, Wolfgangs Gedanken unter Benutzung der neueren Ausdrucksweise darzustellen, denn gerade, weil ihm eine solche Ausdrucksweise fehlt, sind seine Auseinandersetzungen nicht leicht zu verstehen. Wenn die vorgetragenen Sätze auch eine weiter-

gehende Bedeutung besitzen, so mögen sie doch der Einfachheit halber nur für Punktmengen ausgesprochen werden.

Es sei A eine *abgeschlossene* Punktmenge, p ein echter Teil von ihr. Der Rest r möge durch Hinzunahme von Elementen der Menge A abgeschlossen werden, und es entstehe so die Menge r'. Wenn r' mit A identisch ist, so heißt die Menge p ein *unabtrennbarer* Teil von A. Z. B. ist ein Punkt einer Strecke ein unabtrennbarer Teil der Strecke. Der Rest r kann bereits abgeschlossen, also mit r' identisch sein; dann haben die Mengen p und r' nichts gemeinsam. Haben aber p und r' eine Menge s gemeinsam, so kann es eintreten, daß s ein unabtrennbarer Teil von A ist. Dann und nur dann, wenn einer der beiden genannten Fälle stattfindet, heißt p ein *Bestandteil* von A.

Nunmehr wird man leicht die Sätze beweisen: Ein unabtrennbarer Teil i eines Teiles p ist unabtrennbar für das Ganze A. Ein Teil p des unabtrennbaren Teiles i ist unabtrennbar für das Ganze A. Ein Bestandteil p des Bestandteils P ist ein Bestandteil des Ganzen A. Es sei p ein Bestandteil von A, r', wie vorher, die aus dem Rest r gewonnene abgeschlossene Menge. Dann ist auch r' ein Bestandteil von A.

Die wichtigste Anwendung finden die Begriffe des unabtrennbaren Teiles und des Bestandteils bei der Erklärung des *Kontinuums*, die in § 4 (S. 37 des zweiten Teiles dieses Buches) gegeben wird. Sie lautet: „Tritt uns bei der Untersuchung seiner Teile ein solches [abgeschlossenes Ganze] A entgegen, daß jeder Bestandteil A' von A mit dem [abgeschlossen gemachten] B, das außer A' zu A gehört, etwas gemein hat, so heißt ein solches A Kontinuum.“ Die hier ausgesprochene Forderung bedeutet nichts anderes, als daß die Menge A nicht in getrennte Teile zerfallen soll; was Wolfgang vorgeschwebt hat, läuft also hinaus auf die Erklärung des Kontinuums als einer zusammenhängenden, perfekten Menge, die G. Cantor aufgestellt hat. Gewiß ist Wolfgang weit entfernt davon gewesen, die Begriffe: *Punktmenge*, *abgeschlossen*, *perfekt* scharf und klar aufzufassen, allein seine Darlegungen zeigen deutlich, daß ihm die hier vorliegenden Fragestellungen bewußt geworden sind.

Wer mit Liebe und Geduld in Wolfgang Bolyais *Tentamen* forscht, der wird sicherlich noch manche Vorspiele zu Untersuchungen entdecken, die erst lange nach dem Tode seines Verfassers wirklich durchgeführt worden sind. Dem Werden und Wachsen mathematischer Gedanken zu lauschen, wird freilich immer nur wenigen am Herzen liegen; die Menge verlangt von einem Buche, daß es fertige Erkenntnisse in gebrauchsfähiger Form überliefert, und so wird es dabei bleiben, daß das Werk des tiefen und ursprünglichen Denkers nur von wenigen gelesen und von noch wenigeren gewürdigt wird.

VI. Kapitel

Wolfgang Bolyai als Mathematiker

Zweiter Teil: Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie

Wenn sich schon bei der Arithmetik zeigte, daß Wolfgang Bolyais schöpferische Leistungen wesentlich den Grundlagen dieses Gebietes angehören, so gilt das in noch höherem Maße von der Geometrie. Wolfgang selbst hatte deutlich erkannt, wohin ihn seine Begabung weise. „Ja, wenn es gelänge", schreibt er am 27. Dezember 1808 an Gauss, „schön wäre es, daß Du oben an den Spitzen der stolzen Türme arbeitest, ich grübele an ihren Gründen."

Der weitaus größte Teil der geometrischen Untersuchungen Wolfgangs hat der Lehre von den Parallelen gegolten. Eine lebendige Schilderung seiner „schauderhaften, riesigen Arbeiten" zum Beweise des XI. Axioms, die ihm schließlich doch keine Befriedigung gewährten, findet sich in den Briefen, die er in den Jahren 1820 und 1821 an Johann gerichtet hat; da diese Briefe in engem Zusammenhang mit der Entdeckung der absoluten Geometrie durch Johann stehen, einer Entdeckung, die zeigte, daß Wolfgangs Ziel in der Tat unerreichbar war, so sollen sie erst im X. Kapitel mitgeteilt werden. Wolfgang hat sich jedoch keineswegs auf die Parallelentheorie beschränkt, sondern von Anfang an eine bessere, strengere Begründung der ganzen Geometrie im Auge gehabt. Es wird daher zweckmäßig sein, mit einem Bericht über den im *Tentamen* enthaltenen *Allgemeinen Grundriß der Geometrie* zu beginnen und dann erst auf die *Parallelentheorie* einzugehen.

Das System der Geometrie gründet sich, nach Wolfgang Bolyai auf eine Reihe einfacher Tatsachen, die der unmittelbaren Anschauung entnommen sind. Ein System aber ist „ein in durchsichtiger Ordnung aufgebauter Inbegriff

1. strenger Definitionen, wobei man mit den einfachsten Begriffen anfängt und von den konstruierten zu neuen, zusammengesetzteren fortschreitet, bis diejenigen [Begriffe] hervorgehen, welche mindestens alles dasjenige, was dorthin [ins System] gehört, umfassen;

2. einfachster Axiome, unter denen sich keins aus den übrigen herleiten läßt, und der

3. mit ihrer Hilfe bewiesenen Urteile."

Wenn auch viel daran fehlt, daß Wolfgangs System den von ihm aufgestellten Forderungen entspräche, so ist doch die Klarheit be-

merkenswert, mit der er den Begriff des Systems gefaßt hat; insbesondere ist das *Tentamen* wohl das erste Werk, in dem ganz allgemein von der gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome gesprochen wird, und dieser Gedanke war jedenfalls für Wolfgangs Zeit ganz neu.

Bei der Feststellung jener einfachen Grundtatsachen, auf denen die Geometrie aufgebaut wird, erweist sich Wolfgang als ein Vorläufer von Überweg und Helmholtz, insofern er von der Existenz starrer Körper und deren Beweglichkeit im Raume ausgeht. Wenn aber Wolfgang auch nur ein Vorläufer war — denn er ist nicht bis zu der Helmholtz eigentümlichen, entscheidenden Wendung durchgedrungen, daß jede dreifach ausgedehnte Zahlenmannigfaltigkeit, die den gestellten Forderungen genügt, konstantes Krümmungsmaß besitzt —, so lohnt es sich doch, seine Gedanken kurz auseinanderzusetzen. Eine solche Darlegung wird zugleich das Lesen des oft nicht leicht verständlichen *Allgemeinen Grundrißes der Geometrie* erleichtern, der im zweiten Teile dieses Buches, S. 48—109 in deutscher Übersetzung wiedergegeben wird. Der Leser, der die klassische Abhandlung von Helmholtz kennt, möge selbst die beiden Entwicklungen miteinander vergleichen.

Der unmittelbaren Anschauung wird zunächst entnommen (§ 1), daß der Raum ein nach allen Seiten unendliches Kontinuum ist. Im Raume sind als wesentlich verschiedene Gebilde die einander gleichen Raumpunkte, die Linien, die Flächen und die Bestandteile des Raumes zu unterscheiden (§ 2). Nunmehr wird aus der Betrachtung der im Raume vorhandenen starren Körper der Begriff eines „Beweglichen" geschaffen, d. h. eines geometrischen Gebildes, dem die Eigenschaft zukommt, sich ohne Änderung der Gestalt im Raume bewegen zu lassen (§ 3). Hieraus ergibt sich der Begriff der *Kongruenz;* wenn nämlich „ein solches Bewegliches [starres Gebilde] gesetzt ist und es zu verschiedenen Zeiten mit A und B zusammenfallen kann, so zeigt die Anschauung, daß A kongruent mit B ist." Die weitere Entwicklung beruht auf der Bewegung solcher starren Gebilde. „Die Geometrie wird lebendiger, leichter und anschaulicher, falls die genannte Bewegung zugelassen wird, und der griechische und der britannische Archimedes haben sie angewandt; und wenn ein Dreieck auf ein anderes gelegt wird, wie bei Euklid, so muß immer in dem genannten Sinne die Bewegung zugelassen werden." Nachdem in § 4 einige auf die Bewegung starrer Gebilde bezügliche Begriffe erklärt sind, folgt in § 5 die Unterscheidung von drei „primitiven Bewegungsarten". Die erste ist die freie Bewegung. Die zweite besteht in der Drehung um einen festen Punkt; sie führt zur Erklärung der *Kugel*, dem Grundgebilde in Wolfgangs System der Geometrie. Die dritte Bewegungsart ist die Drehung um zwei feste Punkte. Bei

einer solchen Bewegung beschreibt ein dritter Punkt im Allgemeinen eine Linie, von der axiomatisch angenommen wird, daß sie einfach, gleichförmig und in sich zurückkehrend sei. Diese „Erstgeborene der Kugel“ ist der *Ring*; so nennt Wolfgang die Kreislinie. Es kann sich aber auch ereignen, daß der dritte Punkt bei der Drehung „einzig“ bleibt. Die Gesamtheit der Punkte, denen für die beiden gegebenen festen Punkte diese Eigenschaft zukommt, bildet eine *Gerade*. Durch eine Verallgemeinerung wird endlich aus der Geraden die *Ebene* gewonnen.

In § 14 versucht Wolfgang zu zeigen, daß den so erklärten geometrischen Gebilde, dem Ringe, der Geraden und der Ebene, die Eigenschaften zukommen, die man den mit diesen Namen begabten geometrischen Gebilden gewöhnlich zuzuschreiben pflegt. Seine Auseinandersetzungen sind nicht nur recht verwickelt, sondern auch vielfach unklar und unstreng. Es wäre jedoch unbillig, an einen Mathematiker, der die ersten, tastenden Versuche auf dem schwierigen Gebiete der Axiomatik machte, die Anforderungen zu stellen, die wir heute zu stellen gewöhnt sind. Auch eine zweite Entschuldigung kann man für Wolfgang geltend machen. Der Weg, den er einschlug, von der Kugel aus die Geometrie aufzubauen, ist wiederholt im Laufe des 19. Jahrhunderts beschritten worden, ohne daß diese Bemühungen jedoch zu befriedigenden Ergebnissen geführt hätten. Dasselbe gilt auch von dem Gedanken, den Kreis als Ausgangspunkt zu nehmen, den Wolfgangs Sohn Johann, wie wir im XVIII. Kapitel sehen werden, durchzuführen unternommen hat, und so haben Hilbert, Pasch, Peano, Schur u. a. mit Postulaten für die Gerade, die Ebene und den Raum begonnen.

Auf Einzelheiten einzugehen, ist hier nicht möglich. Wer sich die Mühe nimmt, den Andeutungen nachzugehen, die Wolfgang dem Leser „zuzuwerfen“ liebt, wird bei ihm die Keime zu manchen Gedanken finden, die in der neueren Geometrie wichtig geworden sind. Es möge genügen, als Beispiel hierfür Wolfgangs Sätze über *endlich-gleiche Flächen* anzuführen, die sich in einer Einschaltung zum *Allgemeinen Grundriß der Arithmetik* (§ 35, Nr. XIX) finden.

Endlich-gleich nennt Wolfgang zwei ebene Flächenstücke, die in eine endliche Anzahl gegenseitig kongruenter Teile zerlegt werden können; diese Teile sollen bei der Zusammensetzung des Ganzen immer positiv genommen werden. Im Sinne von Hilbert könnte man solche Flächenstücke als *zerlegungsgleich* bezeichnen. Wolfgang hat in aller Strenge gezeigt, daß zwei geradlinige Polygone von gleichem Flächeninhalt immer endlich-gleich sind. Dagegen ist sein Beweis für die Behauptung, daß die nicht gemeinsamen Teile zweier sich teilweise deckenden kongruenten Flächen endlich-gleich sind, mit Recht bean-

standet worden: Réthy hat das Verdienst, die Lücke ausgefüllt und allgemeiner die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt zu haben, daß zwei ebene Flächen von gleichem Inhalt, deren Grenzlinien sich selbst nirgends schneiden und die in zwei verschiedenen Lagen eine endliche Anzahl von Schnittpunkten bieten, endlich-gleich sind.

Es bleibt übrig, von den Untersuchungen Wolfgang Bolyais zu berichten, die sich auf das XI. Euklidische Axiom beziehen. Dieses Axiom oder besser die 5. Forderung besagt:

Wenn eine zwei Gerade schneidende Gerade mit ihnen innere, an derselben Seite liegende Winkel bildet, die [zusammen] kleiner sind als zwei Rechte, so schneiden sich die beiden [geschnittenen] Geraden bei unbegrenzter Verlängerung auf der Seite, auf der diese Winkel liegen.

„Durch Proklus wissen wir, daß [die 5. Forderung] eigentlich beständig angegriffen wurde, z. B. von Ptolemäus, und zwar ist der Grund klar. Die Erfahrung der Männer der Praxis schuf die Geometrie, die Geometrie vertiefte die angewandte Mathematik, aber die Skrupel eines Euklid über die Bewegung wurden von den Ingenieuren und Astronomen nicht geteilt; von ihrem Standpunkt aus war die Forderung des Euklid *unanschaulich*, da die wirkliche Bewegung das Nichtschneiden gar nicht und das Schneiden in praxi meistens auch nicht konstatieren konnte. . . . Euklid war weit schärfer. Er wollte, was Proklus ganz richtig bemerkt, den Satz: *In jedem Dreieck sind zwei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte* umkehren. Der Beweis gelang ihm, aller Bemühungen ungeachtet, nicht, er erkannte, daß hier eine neue Forderung nötig sei, um der Tatsache, daß in unserem Raume zwei richtungsverschiedene Gerade sich nach *unserer Anschauung* schneiden, gerecht zu werden“ (Max Simon).

Die Anstrengungen der Geometer gingen zunächst dahin, die 5. Forderung durch den Nachweis zu beseitigen, daß sie sich als logische Folge aus den übrigen Voraussetzungen Euklids ergebe, also im Grunde überflüssig sei. Für die fast zweitausendjährige Geschichte dieser Bemühungen muß auf die leicht zugänglichen Einzeldarstellungen verwiesen werden. Hier möge es genügen, darauf hinzuweisen, daß alle diese Beweisversuche entweder mit einem Fehlschluß behaftet waren oder an dem Mangel litten, daß, bewußt oder unbewußt, das Euklidische Axiom durch ein anderes, ihm gleichwertiges ersetzt war. Daß es dem Göttinger Astronomen Seyffer (1762—1822), mit dem Wolfgang freundschaftlich verkehrt hatte, „mehr als zweifelhaft schien, ob es überhaupt möglich sei, das XI. Axiom zu beweisen, ohne ein neues Axiom zu Hilfe zu nehmen“, ist schon im II. Kapitel erzählt worden. Vielleicht war Seyffer von Kästner beeinflußt, der, wie Schweikart er

wähnt, „an der Möglichkeit der Lösung verzweifelnd, mit unbegreiflicher Resignation, anstatt nach der wahren Demonstration zu forschen, ein blindes Annehmen öffentlich anriet.“ Auf demselben Standpunkt stand auch Klügel, der, durch Kästner veranlaßt, 1763 als Doktor-Dissertation zum ersten Male eine Geschichte der Parallelentheorie gegeben hat.

Als Wolfgang Bolyai in Göttingen studierte (1796—1799), hatte die Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie und besonders auch mit der Lehre von den Parallelen durch die tiefe und nachhaltige Wirkung von Kants *Kritik der reinen Vernunft* (1781) eine neue Anregung und Belebung erfahren. Wolfgang „bestimmte sich zum Opfer der Parallelen“, aber gewarnt durch den Göttinger Skeptizismus ist er an sein Unternehmen mit größerer Vorsicht und Kritik gegangen als die meisten seiner Vorgänger. Mit Recht hat Johann bemerkt, daß sein Vater „sehr wohl und unter seinen Vorgängern am besten bekannt war mit den Schwierigkeiten des Gegenstandes und im Besitz von selbstgeschaffenen, weit durchdringenden, besseren Lehren.“ Allein auch Wolfgang ist es nicht beschieden gewesen, das zweitausendjährige Rätsel zu lösen, er hat „Schiffbruch gelitten“ und schließlich die Beschäftigung mit den Parallelen als „das Unglück seines Lebens“ angesehen; „es ist ein unheimliches Schlachtfeld, worauf ich jeder Zeit geschlagen wurde; eine allem Streben des Forschergeistes trotzende, uneinnehmbare Felsenburg. In dieser Materie ist das ganze Leben nur eine brennende, ins Meer getauchte Fackel. Es ist eine wahre Krankheit, eine Art von Narrheit, eine tyrannische Idee.“

Als Gauss und Wolfgang Bolyai, dieser von Göttingen, jener von Braunschweig kommend, am 24. Mai 1799 bei Clausthal im Harz voneinander Abschied nahmen, da hat Wolfgang, wie im II. Kapitel berichtet wurde, dem Freunde, nur in kurzer Andeutung, erzählt, daß ihm der Beweis des XI. Axioms gelungen sei. „Es tut mir sehr leid“, schreibt Gauss am 16. Dezember 1799, „daß ich unsere ehemalige größere Nähe nicht benutzt habe, um mehr von Deinen Arbeiten über die ersten Gründe der Geometrie zu erfahren; ich würde mir gewiß dadurch manche vergebliche Mühe erspart haben und ruhiger geworden sein, als jemand wie ich es sein kann, solange bei einem solchen Gegenstande noch so viel zu desiderieren ist. Ich selbst bin in meinen Arbeiten darüber weit vorgerückt (wiewohl mir meine anderen, ganz heterogenen Geschäfte wenig Zeit dazu lassen); allein der Weg, den ich eingeschlagen habe, führt nicht sowohl zu dem Ziele, das man wünscht und welches Du erreicht zu haben versicherst, als vielmehr dahin, die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft zu machen. Zwar bin ich auf manches gekommen, was bei den meisten schon für einen

Beweis gelten würde, aber was in meinen Augen so gut wie NICHTS beweiset. Z. B. wenn man beweisen könnte, daß ein geradliniges Dreieck möglich sei, dessen Inhalt größer wäre als eine jede gegebene Fläche, so bin ich imstande, die ganze Geometrie völlig streng zu beweisen. Die meisten würden nun wohl jenes als ein Axiom gelten lassen: ich nicht; es wäre ja wohl möglich, daß, so entfernt man auch die drei Eckpunkte des △ im Raume voneinander annähme, doch der Inhalt immer unter (*infra*) einer gegebenen Größe wäre. Dergleichen Sätze habe ich mehrere, aber in keinem finde ich etwas Befriedigendes. Mach' doch ja Deine Arbeit bald bekannt: gewiß wirst Du dafür den Dank nicht zwar des großen Publikums (worunter auch mancher gehört, der für einen geschickten Mathematiker gehalten wird) einernten, denn ich überzeuge mich immer mehr, daß die Zahl wahrer Geometer äußerst gering ist und die meisten die Schwierigkeiten bei solchen Arbeiten weder beurteilen noch selbst einmal sie verstehen können — aber gewiß den Dank aller derer, deren Urteil Dir allein wirklich schätzbar sein kann."

Die Äußerungen von Gauss zeigen, daß dieser damals, ähnlich wie vor ihm Saccheri (1733) und Lambert (1766), angefangen hatte, die Folgerungen zu entwickeln, die sich aus der Annahme ergeben, Euklids 5. Forderung sei nicht erfüllt. Wann Gauss Lamberts *Theorie der Parallellinien* kennen gelernt hat, die Johann III Bernoulli (1744—1807) aus dessen Nachlaß im *Magazin für die reine und angewandte Mathematik* vom Jahre 1786 veröffentlicht hatte, wissen wir nicht, wohl aber steht fest, daß Lambert, mittelbar oder unmittelbar, von Saccheris Schrift Kenntnis gehabt hatte. Dagegen haben Wolfgang Bolyai und ebenso dessen Sohn Johann niemals etwas von ihren Vorgängern Saccheri und Lambert erfahren, wie denn überhaupt nur wenige der vielen Schriften zur Parallelentheorie in ihre Hand gekommen sind.

Wolfgang Bolyai ist in den folgenden Briefen an Gauss auf dessen Bemerkungen vom Dezember 1799 nicht eingegangen. Daß seine Überzeugung, das XI. Axiom lasse sich beweisen, dadurch nicht erschüttert worden war, daß er vielmehr fortfuhr, den in Göttingen begonnenen Beweisversuch auszuarbeiten, zeigt der Brief an Gauss vom 16. September 1804. „In diesen Brief eingeschlossen schicke ich Dir meine *Göttingische Theorie der Parallelen*. ... In etwa drei Jahren ist diese Theorie gelegen, Umstände hielten mich ab. Nun habe ich sie beim Lehren [am Kollegium zu Maros-Vásárhely] hervornehmen müssen, und es in einen engeren Raum gepreßt. Ich kann den Fehler nicht entdecken, prüfe Du der Wahrheit getreu und schreibe mir sobald als nur möglich, schreibe Deine Einwendungen oder wenn ich mich schlecht oder etwa zu kurz ausgedrückt oder im Schreiben gefehlt hätte. ...

Hier ist kein Geschmack für so was, auch sonst überhaupt bin ich von den hiesigen Aftergelehrten verdammt. Wenn Du dieses Werkchen davor wert hieltest (ich setze den Fall), so schicke es einer würdigen Akademie hin, daß es beurteilt werde (es soll gestempelt sein). Ich bin auch auf die schlechte Seite gefaßt, wiewohl ich nicht leugne, daß ich es noch nicht herausgegeben hätte, wenn ich, um ruhiger leben zu können zwischen meinen vielen Richtern, nicht um etwas äußere Ehre zu hazardieren gezwungen wäre. Du weißt, was Hamlet sagt «the spurns, that patient merit of th' unworthy takes». Adieu lieber Freund! und antworte mir sobald als möglich!"

Gauss hat in seiner Antwort vom 25. November 1804 den Kern des Beweisversuches und zugleich den Fehlschluß, den Wolfgang begangen hatte, in so vollendeter Klarheit dargestellt, daß wir nichts Besseres tun können, als die betreffende Stelle seines Briefes wiederzugeben; den ganzen Beweis findet man im zweiten Teile dieses Buches, S. 1—15 in deutscher Übersetzung.

„Ich habe Deinen Aufsatz mit großem Interesse und Aufmerksamkeit durchgelesen und mich recht an dem echten, gründlichen Scharfsinn ergötzt. Du willst aber nicht mein leeres Lob, das auch gewissermaßen schon darum parteiisch erscheinen könnte, weil Dein Ideengang sehr viel mit dem meinigen Ähnliches hat, worauf ich ehemals die Lösung dieses Gordischen Knotens versuchte und vergebens bis jetzt versuchte. Du willst nur mein aufrichtiges unverhohlenes Urteil. Und dies ist, daß Dein Verfahren mir noch *nicht* Genüge leistet. Ich will versuchen, den Stein des Anstoßes, den ich darin noch finde (und der auch wieder zu derselben *Gruppe* von Klippen gehört, woran meine Versuche bis jetzt scheiterten) mit so vieler Klarheit, als mir möglich ist, ans Licht zu ziehen. Ich habe zwar noch immer die Hoffnung, daß jene Klippen einst, und noch vor meinem Ende, eine Durchfahrt erlauben werden Indeß habe ich jetzt so manche andere Beschäftigungen vor der Hand, daß ich gegenwärtig daran nicht denken kann, und glaube mir, es soll mich herzlich freuen, wenn Du mir zuvorkommst, und es Dir gelingt, alle Hindernisse zu übersteigen. Ich würde dann mit der innigsten Freude alles tun, um Dein Verdienst gelten zu machen und ins Licht zu stellen, so viel in meinen Kräften steht. Ich komme nun sogleich zur Sache."

„Bei allen *übrigen* Schlüssen finde ich gar nichts wesentliches einzuwenden: was mich *nicht* überzeugt hat, ist bloß das Räsonnement im XIII. Artikel. Du denkst Dir daselbst eine ins Unbestimmte fortgeführte Linie $\Pi \ldots kdcfg \ldots$ [Fig. 1], die aus lauter geraden und gleichen Stücken besteht kd, dc, cf, fg etc. und wo die Winkel kdc, dcf. cfg etc.

einander gleich sind, und willst beweisen, daß Π über kurz und lang notwendig über $k\varphi$ hinaus gehen werde. Zu dieser Absicht lässest Du die gerade Linie $kd \times = Q$ sich nach der Seite zu, wo Π liegt, um k herum bewegen, so daß sie nach und nach von einer Seite des Polygon Π zur folgenden kommt. Du zeigst vortrefflich, daß Q, so wie es stufenweise durch d, c, f, g etc. geht, jedesmal näher an $k\varphi$ kommt: gegen alles dieses läßt sich nichts einwenden; aber nun fährst Du fort: *Deshalb läßt sich Q auf die vorgeschriebene Weise bewegen, bis es nach kq $q \times$ gekommen ist* etc. und diese Schlußfolge ist es, die mir nicht einleuchtet. Aus Deinem Räsonnement folgt meiner Einsicht nach noch gar nicht, daß der Winkel, um den Q, beim Durchlaufen einer Seite von Π (nach oben herum), der $k\varphi$ näher kommt, nicht etwa immer unbedeutender werde, so daß das Aggregat aller sukzessiven Annäherungen, so oft sie auch wiederholt werden, dennoch immer noch nicht groß [genug] werden könnte, um Q in $k\varphi$ zu bringen. Könntest Du *beweisen*, daß $dkc = ckf = fkg$ etc., so wäre die Sache gleich aufs Reine. Aber dieser Satz ist zwar wahr, allein schwerlich, ohne die Theorie der Parallelen vorauszusetzen, strenge zu beweisen."

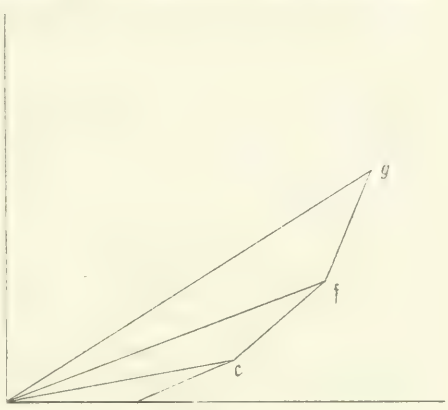


Fig. 1

„Man könnte also immer noch besorgen, daß die Winkel dkc, ckf, fkg etc. sukzessive abnehmen. Geschähe dieses (bloß *exempli gratia*) in einer geometrischen Progression, so daß $ckf = \psi \times dkc$, $fkg = \psi^2 \times dkc$ etc. (so daß ψ kleiner als 1), so würde die Summe aller Annäherungen, so viele Male man sie auch fortsetzte, doch immer kleiner als $\frac{1}{1-\psi} \times ckf$ bleiben, und diese Grenze könnte dann immer noch kleiner als der rechte Winkel $dk\varphi$ sein. Du hast mein aufrichtiges Urteil verlangt: ich habe es gegeben, und ich wiederhole nochmals die Versicherung, daß es mich innig freuen soll, wenn Du alle Schwierigkeiten überwindest."

Im Briefwechsel folgt jetzt eine Pause. Erst am 18. Dezember 1807 antwortet Wolfgang. „Die Harmonie meines häuslichen Lebens wird nie [wieder] hergestellt; die Administration des Schulwesens nimmt auch sehr viel Zeit weg und ermattet den Geist. . . . Viel habe ich also nicht tun können, doch manches, welches aber wie das, was eine Ameise vom Cimboraso wegholt, wenig bedeuten kann. Auch die Par-

allelen habe ich nun vielleicht vollendet: ich schicke es jetzt nicht, damit dieser Brief nicht länger aufgeschoben werde, denn ich fühle meine Schuld schon drückend. — Damals, nachdem ich Dir schrieb, fiel mir bald ein, ich hätte mich deutlicher ausdrücken sollen; nach und nach wie ich es in einem andern Brief habe tun wollen, wurde ich selbst dunkel; zum voraus wußte ich, daß Du nicht zufrieden sein wirst, obwohl Du mir nicht direkt auf das geantwortet hast, wo ich einen sonderbaren Anstoß fand, *daß (nämlich), wenn das Intervall zwischen A und B nie so klein werden kann, daß es nicht wieder über eine Konstante wachse, so kann A nie jenseits B gehen, vorausgesetzt, daß A unendlich sei.* Ich will mich in diesen Stoff itzt gar nicht einmischen, damit mein Brief nicht aufgeschoben werde, ich hoffe, es bald ganz mitzuteilen. Es hatte mich, ehe ich Dir schrieb, das Bild eines unendlichen Flusses beruhigt, wo man diesseits einen Winkel führte. Nach dem habe ich noch etwas versucht, itzt habe ich mich seit ein[ig]er Zeit auch nicht damit beschäftigt, sodaß ich eben nicht gegenwärtig in der Sache bin."

Den angekündigten *Nachtrag zur Göttingischen Parallelentheorie* hat Wolfgang am 27. Dezember 1808 an Gauss gesandt; man findet ihn im zweiten Teile dieses Buches, S. 16—22 in deutscher Übersetzung wiedergegeben. „Nun so, wie ich es in der Weihnachts-Nacht, wie die Katholiken die Geburt des Retters in der mir nachbaren Kirche feierten, gedacht gestern niedergeschrieben, schicke [ich] es Dir hiermit eingeschlossen. Morgen muß ich in mein Gut hinausreisen, habe keine Zeit nachzusehen, versäume ich es jetzt, es kann sein, vergeht ein Jahr, oder gar finde ich den Fehler und schicke es nicht, wie schon mit hunderten geschehen, die ich, wie ich sie fand, vor echt angesehen; doch kam es mir nicht, diejenige[n] niederzuschreiben, vielleicht weil sie zu lange, zu schwer, zu künstlich waren, aber das gegenwärtige schrieb ich gleich ab; Du wirst mir, sobald wie Du kannst, Dein echtes Urteil schreiben. Gelingt es, so fasse ich Mut, meine ziemlich heranwachsenden Grübeleien herauszugeben, sonst habe ich auch nicht Lust zur Geometrie, und sie würden auch in der Welt sonst nicht gelten."

Daß Gauss diesmal die Antwort schuldig blieb, war wohl der Grund, warum der Briefwechsel eine längere Unterbrechung erfuhr; erst im April 1816 hat Wolfgang wieder an Gauss geschrieben, freilich wiederum, ohne eine Antwort zu erhalten.

Das in den kursiv gedruckten Worten des Briefes vom 18. Dezember 1807 angedeutete Axiom: *daß nämlich, wenn das Intervall zwischen A und B nie so klein werden kann, daß es nicht wieder über eine Konstante wachse, so kann A nie jenseits B gehen*, findet sich als *Axiom des Zwischenraums* im *Tentamen*, und zwar im § 16 des *All-*

gemeinen Grundrisses der Geometrie (zweiter Teil dieses Buches, S. 94—109), in dem Wolfgang eine gedrängte Darstellung seiner langjährigen Untersuchungen über die Parallelentheorie gibt. Zugleich berichtet er dort über die Raumlehre seines Sohnes Johann, der, wie wir sehen werden, im *Appendix* zum ersten Bande des *Tentamens* gezeigt hat, daß man ohne Benutzung des Parallelenaxioms ein in sich folgerichtiges System der Geometrie aufbauen kann, daß also dieses Axiom sich nicht aus den übrigen Voraussetzungen Euklids herleiten läßt. Aber auch wenn man die Selbständigkeit der *absoluten Geometrie* Johann Bolyais anerkennt, ist die Frage von Bedeutung, ob, nach dem Ausdruck von Pfaff, das XI. Axiom sich „simplifizieren", d. h. durch Forderungen ersetzen läßt, die der Anschauung näher liegen oder sich durch eine besonders einfache Fassung auszeichnen. Es sollen daher zum Schluß die dem XI. Axiom gleichwertigen Axiome betrachtet werden, die Wolfgang in dem erwähnten § 16 des *Allgemeinen Grundrisses der Geometrie* und in dem *Kurzen Grundriß eines Versuchs* . . . vom Jahre 1851 aufgestellt hat.

Die Annahmen, aus denen sich das XI. Axiom Euklids beweisen und daher die Euklidische Parallelentheorie begründen läßt, hat Wolfgang im *Allgemeinen Grundriß der Geometrie* in vier Arten eingeteilt: Axiome der *Ähnlichkeit*, der *Lage*, der *Größe* und des *Zwischenraums*.

I. *Axiome der Ähnlichkeit.* Schon Wallis hatte 1663 die 5. Forderung Euklids durch die andere ersetzt, daß sich zu jedem Dreieck ein ähnliches in beliebigem Maßstab zeichnen lasse, und dieser Vorschlag ist später von Carnot, Laplace, Legendre u. a. wieder aufgenommen worden; Saccheri hat sogar gezeigt, daß es ausreicht, anzunehmen, es gebe Ein Dreieck, zu dem Ein davon verschiedenes, mit denselben Winkeln gehört. Wolfgang hat dem Axiom der Ähnlichkeit die anschaulichere Form gegeben, daß „keine Kugel sich von irgendeiner anderen [Kugel] durch irgendeine Eigenschaft außer der Größe und dem Ort unterscheide." Mit Recht bemerkt Lobatschefskij (1835) zu dem Vorschlag von Wallis: „Zunächst erscheint eine solche Annahme ebenso einfach wie notwendig; aber wenn wir zu erforschen suchen, welche Begriffe wir davon haben, woher sie ihren Ursprung nimmt, so sind wir gezwungen, sie als ebenso willkürlich zu bezeichnen wie alle anderen, auf die man bis jetzt verfallen ist."

II. *Axiome der Lage.* Wolfgang stellt drei solcher Axiome auf; das dritte ist recht umständlich, und es möge daher genügen, die beiden ersten anzuführen.

1. „Die Summe der inneren Winkel, die zwei auf derselben Seite derselben Ebene an eine Gerade angelegte Gerade bilden, kann, wenn

diese Gerade irgendwie wächst, nicht stetig abnehmend kleiner als jede angebbare Größe werden, außer wenn die Geraden einander schneiden."

2. „Wird z (Fig. 2) nicht von y umfaßt, so wird auch $z + v$ nicht von $y + v$ umfaßt."

Das zweite Axiom hat Wolfgang für die einfachste der von ihm vorgeschlagenen Annahmen gehalten und daher seinen Schülern im Kollegium zu Maros-Vásárhely vorgetragen. Aus ihm ergibt sich das XI. Euklidische Axiom durch folgende Überlegung. „Wenn nämlich $u + v$ (Fig. 2) $< 2R$ ist, und diese [Winkel u und v] beim Punkte δ aneinander gelegt werden, so soll der Rest y heißen; aus irgendeinem Punkte $\mathfrak{f}$ des Schenkels des Winkels y werde die Gerade nach c gezogen, der Winkel, den $\mathfrak{f}c$ mit $c\delta$ bildet, werde z genannt und in c oberhalb z der Winkel v angelegt. Augenscheinlich wird y nicht von z umfaßt, also wird auch (nach dem Axiom) $y + v$ nicht von $z + v$ umfaßt. Folglich findet für die inneren Winkel u und $v + z$ ein Schneiden statt, und das gilt um so mehr, wenn für $v + z$ der kleinere Winkel v gesetzt wird."

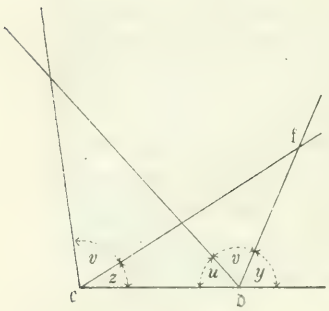


Fig. 2

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß das betrachtete Axiom auch in der Form ausgesprochen werden kann: „Wenn es feststände, daß, sobald die Geraden, die unter gewissen Winkeln u und v an die Endpunkte einer gewissen Geraden angelegt sind, einander schneiden, auch die Geraden, die unter den Winkeln $u + z$ und $v - z$ an die Endpunkte derselben Geraden angelegt sind, einander schneiden (nämlich für dieselbe, beliebig verteilte Summe der inneren [Winkel]), so gilt das XI. Axiom."

III. *Axiome der Größe.* Es möge von den drei einander nahe verwandten Axiomen dieser Art nur das zweite angeführt werden:

„Kein A hat unzählige, voneinander vollständig getrennte Teile, deren jeder dem A absolut gleich ist."

Diese Behauptung ist für endliche Größen A selbstverständlich. Sie gewinnt für den Beweis des XI. Axioms eine Bedeutung, indem sie auf unendliche Größen, nämlich ins Unendliche ausgedehnte Flächenräume, angewandt wird. Das XI. Axiom durch Vergleichung unendlicher Flächenräume zu beweisen, haben besonders Bertrand (1778) und Legendre (1833) versucht. „Beweisen dieser Art", sagt Lobatschefskij (1835), „sollte eine Erklärung des Größenbegriffes vorhergehen, den man in der Geometrie nur in Verbindung mit der Messung

verstehen kann, wenn man noch außerdem verabredet hat, durch welche Merkmale sich das Größere vom Kleineren unterscheidet. Z. B. wird ein Flächenraum, der von einer krummen Linie begrenzt ist, für größer erachtet, als ein Vieleck, das ganz im Innern enthalten ist, dagegen für kleiner, wenn umgekehrt der Flächenraum ganz in dem Vieleck eingeschlossen ist, selbst wenn noch kein Mittel zur Ausmessung dieser Flächen bekannt sein sollte. Handelt es sich aber um Flächenräume von unbegrenzter Ausdehnung, so muß man hier, wie ja überall in der Mathematik, unter dem Verhältnis zweier unendlich großer Zahlen die Grenze verstehen, in die dieses übergeht, sobald Zähler und Nenner des Bruches beständig wachsen. Außerdem muß man hier unter einer geometrischen Größe wenigstens eine solche verstehen, die man angenähert bestimmen kann, indem man sie nach den Merkmalen der Ungleichheit beurteilt. In dieser Beziehung erfüllt der Bertrandsche Beweis ebenso wie alle anderen bei Weitem nicht die Anforderungen, weil wir bei ihnen kein Verfahren zur Ausmessung von Flächenräumen sehen, dessen vollends zu geschweigen, daß die Flächenräume zuerst begrenzt werden und dann mit der Erweiterung ihrer Grenzen ins Unendliche wachsen müssen."

IV. *Axiome des Zwischenraums.* Das einzige Axiom dieser Art lautet: „Wenn die Öffnung zweier einfachen, gleichförmigen, nach beiden Seiten unendlichen Linien, die sich in einer Ebene schneiden, d. h. der Winkel am Schnittpunkt, vor dem Ende der Zeit t immer zu beiden Seiten größer bleibt, als ein beständiger Winkel derselben Linien, so kann in dem teillosen Zeitpunkt, der t abschließt, die eine [Linie] nicht die andere übersprungen haben."

Solange der Schnittpunkt der beiden Linien in einem endlichen Bereich verbleibt, wird gegen die Anwendung des Axioms nichts einzuwenden sein, aber wenn der Schnittpunkt ins Unendliche rückt — und gerade dieser Fall liegt bei Wolfgangs Beweisversuch vor —, so wird man mit Kummer sagen müssen: „Im Unendlichen ist alles möglich."

Im *Kurzen Grundriß eines Versuches* (1851) hat Wolfgang das XI. Axiom durch die Annahme ersetzt: „Könnten jede drei Punkte, die nicht in einer Geraden sind, in eine Kugel fallen, so wäre das XI. Axiom bewiesen." (Zweiter Teil dieses Buches, S. 151).

Wolfgangs Annahme ist gleichbedeutend damit, daß drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte stets einem Kreise angehören. Er trifft hierbei mit einem Schüler von Gauss, F. L. Wachter, zusammen, der 1817 ohne Benutzung des Parallelenaxioms versucht hatte, den Lehrsatz herzuleiten, daß durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte der Ebene stets ein Kreis gelegt werden könne. Wenn auch dieser Beweis-

versuch gescheitert ist, so verdient doch das Verfahren, mittels dessen Wachter aus seinem Lehrsatz zum Parallelenaxiom gelangt war, mitgeteilt zu werden.

„Irgend eine gegebene, in den Punkten A und B [Fig. 3] begrenzte Gerade möge in C halbiert und durch den Punkt C eine zweite, auf der Geraden AB senkrechte Gerade CD gezogen werden. Aus den Punkten A, B ziehe man in derselben Ebene mit AB und CD die Geraden AE und BF, die mit der gegebenen AB irgendeinen spitzen Winkel bilden. Von dem Punkte C fälle man auf AE und BF die Lote CG und CH, die diese in G und H schneiden. Man verlängere CG und CH bis J und K, so daß $CJ = 2CG$, $CK = 2CH$ wird. Aldann läßt sich durch die drei Punkte C, J, K ein Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt, wie man aus der Zeichnung erkennt, auf der Geraden CD deren Schnittpunkt mit der Geraden AE oder BF bildet, den nachzuweisen wir beabsichtigt hatten."

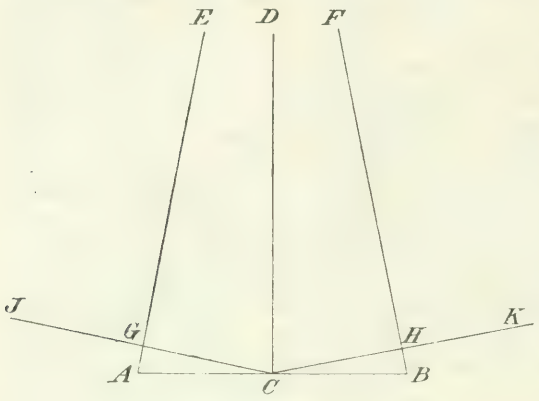


Fig. 3

Mit Recht hat Frischauf erklärt, daß von allen Axiomen, die zum Ersatz des Parallelenaxioms vorgeschlagen worden sind, die Voraussetzung, drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, müßten stets auf einer Kugelfläche liegen, am anschaulichsten ist.

Johann Bolyai hat kurz vor Wolfgangs Tode, 1856, in der Vorrede zu einer unvollendet gebliebenen Abhandlung über den *Beweis des XI. Axioms* über die Untersuchungen seines Vaters zur Parallelentheorie ein Urteil abgegeben, dem man noch heute im wesentlichen zustimmen kann. „Er hat die Sache weit und ohne Vergleich kräftiger [als seine Vorgänger] angegriffen, ja man kann beinahe sagen, alle möglichen Wege erschöpft, ohne jedoch selbst dadurch auch nur einen Schritt näher zum Ziele gekommen zu sein, indem, wie er selbst sehr richtig sagt, das *Si paullum a summo discessit, vergit ad imum* auch hier seine volle Anwendung findet. ... Aber er täuscht sich, wenn er auf die Unmöglichkeit der Gleichheit der Stücke mit dem Ganzen hier bei ∞ selbst auch nur das geringste Gewicht legt und überhaupt an die Möglichkeit eines neuen oder anderen Axioms dafür denkt."

VII. Kapitel

Johann Bolyais Jugend (1802—1818)

Johann Bolyai, zu Klausenburg am 15. Dezember 1802 geboren, war zunächst auf dem väterlichen Gute zu Domáld herangewachsen. Im April 1804 zogen seine Eltern nach Maros-Vásárhely; doch haben sie auch später oft auf der schönen Besitzung geweilt, besonders im Sommer und zur Zeit der Weinlese.

Schon früh begann der Verstand des Knaben zu erwachen, und es zeigten sich die Keime einer ungewöhnlichen mathematischen Begabung. „Kein alltägliches Kind“ war es, dem Gedanken durch den Kopf gingen, wie dem kleinen Johann. „Als ich, mit ungefähr drei Jahren, äußern hörte, jedoch ohne nähere Erklärung, die Welt, worunter ich damals nur die Erde verstand, habe kein Ende, so dachte ich, die Erde als in die Tiefe gehend ins Unendliche gedacht, wenn sie auch ein Ende, das heißt einen Rand hätte, so müsse doch darüber hinaus wenigstens ein unendlicher Abgrund, das ist ein leerer Raum, sein, und hatte somit selbst mir schon einen Begriff vom Raume verschafft gehabt.“ Und der Vater schreibt voll Stolz am 18. Dezember 1807 an Gauss: „Im Spiele hat er viele Gestirne am Himmel kennen gelernt und die gewöhnlichen geometrischen Gestalten u. d. gl. Er macht von seinen Begriffen auch schickliche Anwendungen, z. B. zeichnet er von selbst die Lage der Sterne in den Gestirnen mit Kreide aus. Einmal noch den vorigen Winter schnitt er eine Tartuffel und rief aus »Hi! Vater, was ich fand, einen Tartuffel-Sinus eines Tartuffel-Bogens«, und so war es. Wieder als er auf dem Lande den Jupiter erblickte, sagte er, wie ist es, daß man den in der Stadt auch von da sieht, er muß weit sein. Wieder drei entlegene Örter, wo er gewesen, verlangte er, ich sollte es ihm mit einem Worte bezeichnen; ich wußte es nicht, nun fragte er, ob das eine mit dem andern in einer [geraden] Linie wäre, und so alle nach der Reihe; nun, sagte er, also ist es ein Triangel u. d. gl. viele. Er hat eine große Lust am Papierschneiden mit der Schere. Einmal schneidet er ein Triangel, es war rechtwinklig; nun, wiewohl ich ihm nichts von den Arten der Triangeln jemals sagte, sprach er, dies sei so ein Triangel wie ein halbes Rektangel.“

Alles das lernte Johann im Spiele, weil der vorsichtige Vater dem wißbegierigen Kinde nur „Andeutungen zuwarf“. Mit dem planmäßigen Unterricht hat Wolfgang sogar bis zum neunten Jahre gewartet.

Gewarnt durch die Erfahrungen in der eigenen Jugend und beeinflußt durch Rousseaus *Émile*, den er genau kannte, hat Wolfgang der

körperlichen Entwicklung des Knaben besondere Aufmerksamkeit zugewandt, „daß das Gleichgewicht der Kräfte bleibe, daß sie brüderlich zusammenschreiten, keine Tyrann der übrigen werde“ (Brief an Gauss vom 27. Februar 1803). „Seinen Körper übe ich vorzüglich, kann mit seiner kleinen Haue in der Erde gut arbeiten“ (Brief an Gauss vom 18. Dezember 1807). Auch später liebte Johann Gartenarbeiten, ergötzte sich an Ball- und Versteckspielen und zeichnete sich aus durch „affengeschicktes Klettern, besonders nach Vogelnestern.“

Als Johann ungefähr sechs Jahre alt war, eignete er sich fast unbemerkt, auf einige Anweisungen hin, das Lesen an. Ein Jahr darauf begann er die deutsche Sprache zu lernen. Als er neun Jahre alt wurde, ließ ihn der Vater zu den Gymnasialstudien übergehen, und zwar erhielt er den Unterricht zunächst im väterlichen Hause. Die Hauslehrer wählte Wolfgang unter den besten Studenten. Der erste war Daniel Vajda; ihm folgte Josef v. Szilágyi. Die Leitung der mathematischen Ausbildung behielt Wolfgang sich selbst vor. Johann erzählt: „... wonach ich bald die ersten sechs Bücher Euklids mir aneignete. Mehr tat dabei mein Vater nicht, als daß er besonders bei Erklärung des Punktes bemerkte, die Zeit habe ebenso teillose Teile wie der Raum; zum Beispiel sei das Ende von 8 und der Anfang von 9 Uhr ein derlei [solcher] [Punkt]. Später ließ er mich den Anfang von Eulers Algebra bis einschließlich zu den kubischen und biquadratischen Gleichungen studieren. Dann ging ich größtenteils Vegas Mathematik, Döttlers Physik durch.“ Der Knabe durchschaute mit dem Aufblitzen des Genies oft auf einmal den Beweis eines Lehrsatzes oder die Lösung einer Aufgabe; „wie der Teufel sprang er vor mich hin“, erzählt der Vater, „und drängte, ich solle mit ihm weiter gehen.“ Im Alter von zwölfeinhalb Jahren hatte er bereits die Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie durchgearbeitet und aus der analytischen Geometrie die Kegelschnitte beendet.

Vom zwölften Jahre ab hat Johann den Klassenunterricht des ev. ref. Kollegiums zu Maros-Vásárhely besucht. Daneben hörte er die Vorlesungen, die Wolfgang für die *Studenten* hielt. Dieser schreibt darüber am 10. April 1816 an Gauss: „Er weiß vom Vega (welcher mein Manual ist im Collegio) nicht nur die ersten zwei Bände überall, sondern ist auch im dritten und vierten Bande bewandert, liebt Differential- und Integral-Rechnungen und rechnet darin mit außerordentlicher Fertigkeit und Leichtigkeit ... Jetzt endigt er bald meine physische und chemische Vorlesungen; einmal [22. Februar 1816] hat er auch hiervon mit meinen erwachsenen Schülern ein öffentliches, sehr löbliches Examen gegeben in lateinischer Sprache, teils wo ihn andere ad aperturam fragten, teils bei Gelegenheit ließ ich ihn einige Beweise in der

Mechanik mit Integral-Rechnung führen, wie veränderliche Bewegung, Tautochronismus der Zykloide u. d. gl. Nichts mehr war zu wünschen; edle Einfalt, Klarheit, Schnelligkeit und Leichtigkeit waren auch für Fremde hinreißend, er hat einen schnell und viel fassenden Kopf und manchmal Blitze von Genie, die mehrere Reihen auf einmal mit einem Blicke findend durchsehen: er liebt reine tiefe Theorien und Astronomie."

Neben der Ausbildung in den Wissenschaften wurde die Pflege der Künste nicht vernachlässigt; wußte doch Wolfgang, welche Quelle edler Freuden, welcher Trost in trüben Stunden sich hier dem Menschen erschließt. Die Violine bekam Johann bereits mit sieben Jahren in die Hand. Mit neun Jahren konnte er gut nach Noten spielen, mit zehn übernahm er bereits in klassischen Streichquartetten die erste Geige. „Im zehnten Jahre fand ich ihn komponierend", heißt es in Aufzeichnungen Wolfgangs über die Jugend seines Sohnes, „ich sah abgeschrieben einige Adagios und Allegros. In allen diesen lag nicht nur ein Gedanke, sondern auch etwas tieferes Gefühl." Und K. Szily berichtet: „Schon im zwölften Jahre war er ein so ausgezeichneter Violinspieler, daß er die schwersten Stücke vom Blatt spielen konnte. Damals gab man in Maros-Vásárhely eine Oper, vielleicht die erste. Bei der Vorstellung war auch der blinde Komponist zugegen. Die erste Geige spielte ein junger Sachse, die zweite Johann. Als eine Saite auf der Violine des ersten Geigers riß, tauschte man die Noten, und das Kind spielte prima vista die erste Geige, und zwar so, daß der Komponist, der bis dahin unzufrieden gewesen war, ausrief: »Bravo, jetzt dominiert die Prime«."

Mit dem Zeichnen wurde angefangen, als Johann neuneinhalb Jahre alt war, dieser ließ es jedoch nach kurzer Zeit liegen; später hat er das Versäumte nachgeholt. Dagegen konnte er niemals ein Verständnis für die Dichtkunst gewinnen; „die poetische Sprache ist ein Unsinn", das war eine von ihm oft geäußerte Ansicht.

Nachdem Johann die letzte Schulklasse, die logische Klasse, beendet hatte, bestand er am 30. Juni 1817 das *Rigorosum* und wurde damit Student. Er war der beste seiner Klasse; in Mathematik und Physik übertraf er selbst die Studenten. Auch im Lateinischen war er weit fortgeschritten; seine lateinische Prüfungsarbeit, die uns noch erhalten ist, wurde sehr gelobt. Daß er die lateinische Sprache meisterlich zu handhaben wußte, zeigen auch der *Appendix* (1830) und die *Responsio* (1837).

Wie Wolfgang damals über seinen Sohn dachte, ersieht man aus einer Aufzeichnung vom 13. August 1817.

„Er hat große Neigung für das Studium der Wissenschaften, insbesondere der Mathematik. In der Musik und zwar auf der Violine kann er auch ein Virtuos werden. Auch für Zeichnen hat er ein wenig

Neigung Für die Poesie habe ich keine Neigung an ihm bemerkt; möglich, daß sie sich später entwickeln werde. Die Sprachen lernt er leicht. Dieses alles sind Gaben der Natur".

„Er hat eine schöne Urteilskraft ebenso sowohl für Menschen wie für andere Dinge. Er ist nicht häßlich. Er ist launisch, sodaß er manchmal selbst seinen Pflichten im Lernen nicht nachkommt; manchmal aber lernt er zu viel, von früh bis spät, auch auf Kosten seiner Gesundheit. Das ist ein Fehler: *μηδὲν ἄγαν*. Manchmal ist er hypochondrisch oder zu lustig, aus Gründen, die andere nicht einsehen können. Er sekiert gern andere, sodaß es sehr wenige gibt, mit denen er sich vertragen kann. Das ist Unreife. Manchmal ist er ungehorsam, hauptsächlich der Mutter gegenüber. Das ist ein Mangel der Erziehung. Nichts destoweniger kann er es gut machen, wenn er nur will."

„Er verläumdet niemals andere; wenn er von jemanden nichts Gutes zu sagen vermag, so spricht er nicht. Er ist kein Lügner. Er ist rechthaberisch, das ist aber mangelnde prudentia. Er ist barmherzig, auch wenn er nicht helfen kann. Er ist dankbar. Ist zornig, bis er die Beleidigung vergessen hat. Er verachtet niemanden wegen seiner Fehler. Er ist nicht zerstreut."

„Man findet hier Fehler und gute Eigenschaften. Gott gebe, daß die Fehler in einigen Jahren sich in das Gegenteil verwandeln, die guten Eigenschaften aber erhalten bleiben."

Schon im Jahre 1807 hatte Wolfgang, als er seinem Freunde Gauss von der ungewöhnlichen mathematischen Begabung des fünfjährigen Johann berichtete, die Worte hinzugefügt: „Soll[te] die Hoffnung nicht täuschen, so soll er nach 15 Jahren zu Euch reisen und Dein Schüler sein: wenn ich gesund bin dazumal, begleite ich ihn zu Dir." Inzwischen hatten sich die Beziehungen zu dem Jugendfreunde gelockert. Wolfgangs Brief vom 27. Dezember 1808 war unbeantwortet geblieben. Vielleicht hatte Gauss zunächst gezögert zu schreiben, weil er Wolfgangs Versuch, den angeblichen Beweis für das elfte Axiom vom Jahre 1804 zu verbessern, für verfehlt hielt; dann war seine erste Frau gestorben, und es folgten die Wirren der Kriegszeiten. Wolfgang tat dies Schweigen weh, aber er zweifelte nicht daran, daß die Gesinnung seines Freundes gegen ihn die gleiche geblieben sei „wie in dem blütenvollen Frühling der Jugend," und hielt an dem Gedanken fest, seinen Sohn zu Gauss zu bringen. Auch Johann, der schon damals in den Schriften von Gauss, die sein Vater besaß, gelesen hatte, teilte dessen tiefe Verehrung für den „mathematischen Koloss in Göttingen" und wünschte nichts sehnlicher, als sich unter seiner Leitung der Mathematik zu widmen.

Freilich war eine große Schwierigkeit zu überwinden. Wolfgang war nicht in der Lage, die Kosten für den beabsichtigten dreijährigen Aufenthalt in Göttingen zu bestreiten. Das bescheidene Einkommen, das er als Professor hatte, reichte kaum zur Bestreitung des Haushalts; über dies wurde es in den schweren Zeiten nach den langen Kriegen nur unregelmäßig und in entwertetem Papiergeld gezahlt. Auch die Nebeneinnahmen durch Privatunterricht, Landwirtschaft, Weinhandel flossen nur spärlich. Dazu kam, daß Wolfgang es nie verstanden hat, mit dem Gelde umzugehen, und, wie er selbst sagt, „ein schlechter Wirtschafter" war. Wenn nicht edle Gönner, besonders die Barone Kemény und die Grafen Teleki, sich seiner angenommen hätten, so wäre er elend in Schulden untergegangen.

Ein großes Glück war es daher, daß der Graf Adam Kendeffi, wie Wolfgang im April 1816 an Bodor schreibt, „die Gnade hatte, meinem Sohne für die Zeit, wann er zu Gauss reisen wird, seine Hilfe zu versprechen." Um außerdem die Unterstützung des kirchlichen Generalkonsistoriums zu erlangen, beschloß Wolfgang, den Sohn zunächst noch auf dem Kollegium in Maros-Vásárhely zu lassen, damit er ein Jahr nach dem Rigorosum die für das Studium im Ausland vorgeschriebenen öffentlichen Prüfungen an den drei Kollegien zu Klausenburg, Nagyenyed und Maros-Vásárhely ablegte.

Nunmehr schien die Zeit gekommen, Gauss von diesen Absichten in Kenntnis zu setzen. Dies geschah in dem Brief vom 10. April 1816, der bereits erwähnt wurde. Nachdem Wolfgang die mathematische Begabung seines Sohnes gerühmt hat, bittet er den Freund, diesen nach zwei Jahren zu ihm schicken zu dürfen. „Ich wollte ihn 3 Jahre lang bei Dir halten und, wenn es möglich wäre, . . . in Deinem Hause, denn allein kann man einen 15jährigen Jüngling nicht dalassen und einen Hofmeister mitzuschicken übersteigt meine durch viele Prozesse geschwächten Kräfte. . . . Deiner Frau Gemahlin Unkosten würde ich, versteht sichs, schon entschädigen. — Wir würden alles anordnen, wenn ich mit ihm zu Dir hinaufginge. In Hinsicht auf diesen Plan berichte mich unverholen: 1° Hast Du nicht eine Tochter, welche damals gefährlich (reciproce) wäre; freilich muß die Jugend in diese Schlacht, und es ist nur ein kleiner Teil der Vernunft, wenn man nicht von der blinden Kugel getroffen als Krüppel aus den elyseischen Träumen wach wird . . . 2° Seid Ihr gesund, nicht arm, zufrieden, nicht mürrisch? besonders ist Deine Frau Gemahlin eine Ausnahme von ihrem Geschlechte? ist sie nicht veränderlicher als die Wetterhähne? und so wenig im Voraus zu berechnen wie die Barometerveränderungen . . . 3° Alle Umstände zusammengenommen kannst Du mir leichter mit einem Worte sagen, daß

es nicht sein kann; denn ich werde nie daran zweifeln, daß es nicht an Deinem Herzen fehlen wird."

Mit Ungeduld sahen Vater und Sohn der Antwort entgegen, die die Entscheidung über Johanns Zukunft bringen sollte. Es vergingen Wochen und Monate, und der ersehnte Brief aus Göttingen kam nicht.

Man hat es, wie Bedőházi bemerkt, Gauss zum Vorwurf gemacht, daß er das Schreiben seines alten Freundes keiner Antwort gewürdigt habe. Es habe vielleicht darin seinen Grund gehabt, vermutet Bedőházi, daß Gauss mit der Einrichtung seiner neuen Sternwarte beschäftigt war, die er im Herbst 1816 bezogen hat, vielleicht auch in familiären Gründen; Gauss hatte sich am 4. August 1810 wieder verheiratet, und es waren aus den beiden Ehen vier Kinder von 10 bis 2 Jahren in seinem Hause; das fünfte wurde erwartet, es war die am 19. Juni 1816 geborene jüngste Tochter Therese. „Schließlich", meint Bedőházi, „so heiß eine Freundschaft anfangs auch aufflammt, so kühlt sie in Ermangelung persönlicher Berührung nach so langer Zeit doch ab." Seitdem der Wortlaut des Briefes vom 10. April 1816 bekannt ist, den Bedőházi noch nicht benutzen konnte, kommt ein weiterer Grund hinzu. „Nicht das Stillschweigen von Gauss", äußert sich Schlesinger, „sondern vielmehr die schon über das Naive hinausgehende Art und Weise muß uns befremden, wie Wolfgang unter Hineinziehen von Gaussens Familie das pro und contra seines Planes erörtert".

Wie Johann selbst das Verhalten von Gauss aufgefaßt hat, zeigt eine Aufzeichnung von ihm, die er bald nach dem Tode seines Vaters (November 1856) niedergeschrieben hat. „Zugleich bemerke ich eine Begebenheit, die sich noch in meiner Kindheit zutrug. Ich war von meinem Vater an Gauss empfohlen, er möchte mich, da ich besondere Anlage zur Mathematik zeigte, etwa zu sich nehmen, damit sich meine Fähigkeiten in seiner Nähe und Umgebung um so mehr entwickeln könnten, bei welcher Gelegenheit ihm mein Vater zugleich einen großen, schönen meerschaumenen Pfeifenkopf zum Geschenk schickte. Gauss jedoch, den Antrag wahrscheinlich weder annehmen noch ablehnen wollend, wobei Ersteres mich bei seiner Abneigung gegen Unterrichtserteilung gar nicht wundert, indem selbst meine Wenigkeit, besondere Fälle ausgenommen, ganz unendlichen Widerwillen dagegen hat, und Letzteres, nämlich die Nichtwillfahrung dem Ansuchen meines Vaters, ihr freundschaftliches Verhältnis schwer oder doch génant machte, — kurz Gauss zog es vor, seit der Zeit die Antwort schuldig zu bleiben und fuhr so fort bis zum Frühjahr [6. März] 1832 zu schweigen, wo er dann . . . und erst sodann ein abermaliger Briefwechsel oder -verkehr zwischen den beiden Kolossen sich entspann ... Wolfgang Bolyai ist dem Gauss voll-

kommen ebenbürtig. Alles in Allem kann kein Sterblicher vollkommen sein. Wolfgangs Arbeit ist nicht minder wichtig, und ich ziehe es vor, mehr unter der Leitung des Letzteren als unter Gauss gestanden zu sein, weil mir Gauss nie den reinen Geist für die Mathematik und noch weniger für Philosophie einzuflößen, überhaupt zum liebsten und besten Teil meiner Selbstausbildung beizutragen im Stande gewesen wäre, als dies bei Wolfgang Bolyai der Fall war, teils durch einzelne, wenn auch bis zur Herausgabe selbst seiner Werke 1829 nur selten und spärlich zugeflossene eigene und mehr durch meine eigenen, dadurch rege geworden Ideen".

Nachdem der Plan, Johann nach Göttingen zu bringen, gescheitert war, dachte Wolfgang daran, ihn, den „er zum Opfer der Mathematik bestimmt hatte", auf die Universität in Pest oder in Wien gehen zu lassen. Jedoch war an keiner dieser Hochschulen ein Mathematiker tätig, der ihm der rechte Mann für Johann zu sein schien; auch wollte er den Sohn nicht den Gefahren des freien akademischen Lebens aussetzen. So entschied er sich schließlich dahin, Johann die militärische Laufbahn einschlagen zu lassen, zu der er selbst als Jüngling die größte Neigung gehabt hatte, und zwar sollte dieser auf die k. k. Ingenieur-Akademie in Wien kommen, die im In- und Auslande sich eines vortrefflichen Rufes erfreute. Hierdurch eröffnete sich für Johann, so meinte Wolfgang, nicht nur die Hoffnung auf ein schönes Fortkommen, sondern auch die Möglichkeit, sich in der Mathematik weiter auszubilden, die im Lehrplan der Akademie an erster Stelle stand.

In den Aufzeichnungen aus dem Jahre 1856, aus denen soeben ein Stück mitgeteilt wurde, hat sich Johann bitter über diesen Entschluß seines Vaters beklagt. „Bei aller gebührenden Achtung der dortigen Erziehung [auf der Ingenieur-Akademie] wäre es doch bei einem solchen Talente, als er in mir entdeckte, für mich zweckmäßiger und wünschenswerter gewesen, mich bei sich zu Hause zu behalten und selbst für meine Erziehung zu sorgen, um mich der mathematischen Wissenschaft, wozu ich seit jeher vorzügliche und unwiderstehliche Neigung hatte, desto mehr und konsequenter widmen zu können. Ich wenigstens, hätte ich das Glück zu einem solchen Sohne gehabt, hätte so einen nicht von mir entfernt." Neben dem Vorwurf lassen diese Worte ein rührendes Vertrauen des Sohnes zum Vater erkennen, dem er in der Tat viel zu verdanken hatte.

Über die Einrichtungen und den Lehrplan der Ingenieur-Akademie in Wien wird im nächsten Kapitel ausführlich berichtet werden. Hier sei nur bemerkt, daß sieben Jahreskurse vorhanden waren, die von unten nach oben als I. bis VII. Klasse bezeichnet wurden. Die Regel war, daß die Zöglinge mit dem elften bis zwölften Lebensjahre eintraten; es

wurden jedoch auch ältere Knaben auf Grund einer Aufnahmeprüfung zugelassen, bei der es hauptsächlich auf den Nachweis der mathematischen Kenntnisse ankam.

Noch im Sommer 1817 begann Wolfgang seinen Sohn für die Akademie vorzubereiten, damit dieser im Herbst des Jahres in die V. Klasse eintreten könne. Das ging schnell von statten; denn in der Mathematik wußte Johann mehr, als in der IV. Klasse durchgenommen wurde. Es handelte sich hauptsächlich darum, daß er das mathematische Lehrbuch von Hauser durcharbeitete, das statt des Vega an der Akademie benutzt wurde, und sich im Gebrauch der deutschen Sprache übte, in der die Prüfung abzulegen war; am Kollegium zu Maros-Vásárhely wurde nämlich etwa bis 1842 in den oberen Klassen nur lateinisch gesprochen.

Die wahre Sorge war eine andere, nämlich wie die nicht unbeträchtlichen Geldmittel zum Aufenthalt auf der Akademie beschafft werden sollten, und diese Sorge wurde noch dringender, als Wolfgang durch einen Bekannten in Wien erfuhr, daß die Akademie nur bis zur IV. Klasse neue Schüler aufnehme, weil man eine mindestens vierjährige Ausbildung zur Aneignung der militärischen Eigenschaften für unerläßlich hielt.

So kam es, daß Johann nach bestandenem Rigorosum das Maros-Vásárhelyer Kollegium als Student der Philosophie weiter besuchte.

Daß ihn die doppelte Enttäuschung niederdrückte, wird man verstehen und mitfühlen. Bedenklich aber war es, daß schon jetzt Züge in seinem Charakter zum Vorschein kamen, die später für ihn verhängnisvoll wurden, vor allem eine Heftigkeit und Leidenschaftlichkeit, die sich gelegentlich in furchtbaren Wutausbrüchen Luft machte. Ohne Zweifel haben die häuslichen Verhältnisse dazu beigetragen. Er war das einzige Kind seiner Eltern; eine 1805 geborene Schwester ist vor 1807 gestorben. Die Mutter kränkelte; sie hing an dem Sohne mit abgöttischer Liebe, gab allen seinen Launen nach und verhätschelte ihn. Aber auch der Vater scheint dem Sohne nicht gewachsen gewesen zu sein, der gerade damals einer festen Hand bedurft hätte.

„Die Vorlesungen besuchte Johann selten. Bei dem Herannahen der Winterprüfungen klagte der damalige Professor der Geschichte, Johann Antal, der spätere Bischof der Reformierten, seinem Vater, daß Johann sich immer nur mit dem Brettspiel befasse und die Vorlesungen nicht besuche ... Der Vater nahm den nachlässigen Burschen vor und erteilte ihm einen Verweis, auf den dieser nicht achtete. Nachdem er die Vorlesungen ein-, zweimal durchgelesen hatte, ging er zur Prüfung. Er antwortete vorzüglich; aus welchem Gebiet und wie oft man ihn auch fragte, überall wußte er gut Bescheid."

„Auch im folgenden Semester setzte er das Brettspiel fort; sein

Professor machte aber darüber keine Bemerkung und bei der Prüfung ging wieder alles ganz gut" (K. Szily).

Endlich gelang es Wolfgang, für seinen Sohn die Unterstützung des in Klausenburg lebenden Generalkurators des Kollegiums, Grafen Nicolaus Kemény, zu gewinnen. Dieser übernahm es, für die vier Jahre die Gebühren an die Akademie zu zahlen. Das bedeutete nicht wenig. Für die erste Ausrüstung waren 225 Gulden zu entrichten und dann jährlich 1000 Gulden; schon ein Jahr nach Johanns Aufnahme wurde übrigens der jährliche Betrag auf 880 Gulden herabgesetzt und hat sich während der weiteren drei Jahre nicht geändert.

Im August 1818 nahm Johann Abschied von der Heimat und den Eltern und reiste nach Wien; wie es scheint, hat ihn sein Gönner, Graf Nicolaus Kemény, dorthin mitgenommen.

Schweren Herzens ließen Vater und Mutter den einzigen Sohn in die Ferne ziehen. „Er soll nicht zu Hause bleiben", sagte die Mutter, „aber wenn er geht, werde ich wahnsinnig". Wie innig sie an Johann hing, zeigen einige Zeilen an ihn, die sich erhalten haben: „Mein süßes Kind! Zu gar vielen Dingen haben wir nicht immer Lust, doch müssen wir uns daran gewöhnen, zu rechter Zeit zu tun, wozu wir gar keine Lust haben. . . . Der Frühling blüht mir, wenn ich Gutes von Dir höre; ewiger Winter senkt sich im andern Falle auf mich herab."

Jene Ahnung Susannas hat sich nur allzubald bewahrheitet. Schon im Juni 1819 schreibt Wolfgang an Bodor: „Die Hysterie hat meine Frau ganz erdrückt; ich hätte die Keime dieses höllischen Gewächses von Hysterie schon in ihrer Mädchenzeit erkennen können, wenn ich in der Botanik der Ufer des Cocytus bewandert gewesen wäre; jetzt ist es für den Herbst horrende gewachsen, der Gärtner war gut (Du weißt, wer die Mater ist), Luft und Boden waren Armut und Schicksale. . . . Es ist nicht tötlich, aber schlimmer als der Tod, Szotyori [der Arzt] fürchtet Wahnsinn."

Der Geist der unglücklichen Frau umnachtete sich immer mehr. Im August 1821 äußerte sie den Wunsch, das Paradies ihrer Jugend, Domáld, noch einmal wiederzusehen. „Mit großer Anstrengung habe ich sie hinaus und wieder zurück gebracht; bei aller Traurigkeit haben wir dort schöne Stunden verlebt: in einem Teile des Gartens beugen sich die Bäume unter der Last des Segens, in einem anderen Teile sind im Dickicht sich schlängelnde Wege, ein Bach, Wasserfälle von Fels zu Fels, als wäre man in einem Alpenwalde; bei einem Wasserfall eine Einsiedlerhütte mit Steintisch; dort aßen wir zu Mittag, zu dritt, indem wir nämlich Johanns Bildnis aufstellten; rings umher mit Johann gleichaltrige Birken, die ihre Wipfel zum Himmel erheben — und ein

kleines schönes Mädchen badete unbekleidet beim Wasserfall; kleine, noch unbetrogene Eva! und wir nach dem Falle noch einmal im Paradies“ (Brief an Bodor vom 3. September 1821).

Bald darauf, am 19. September 1821, ist Susanna gestorben. „Wenn ich an ihre unzähligen, schönen Empfindungen, nacheinander hervorströmenden schönen Reden, schönen heiligen Gesänge und an ihr schweres Leiden denke, jammern alle Schmerzenssaiten meiner Seele ihr nach. Du kannst es kaum glauben, ich selbst habe es kaum geglaubt, wie es mich schmerzt. . . . Heiter und mit ruhiger tapferer Seele ging sie dem Tode entgegen. . . . Ohne jeden Kampf wurde sie nur verklärt Ihrem Wunsche gemäß habe ich sie nach Domáld gebracht und an der Stelle beigesetzt, die sie bezeichnet hatte . . . in meinem Garten ist ein hoher Berg, und in dessen Mitte ein schöner Platz . . . Siegreich hat sie ihren Kampf gefochten und bekränzt ruht sie nun in den Armen der Mutter Erde — sie selbst eine (glückliche, unglückliche) Mutter, (in vieler Hinsicht) ein Selbstopfer für ihren Sohn, der es das Schicksal nicht gestattet hat, ihr Kind, als es ihr Freude bereiten konnte, zu umarmen. . . . Jetzt habe ich das Bild [Johanns] auf das Mädchenbildnis der Mutter getan, den Sohn in die Arme der Jungfrau; dies ist mein Altarbild, vor dem ich oft Tränen opfere“ (Brief an Bodor vom 10. Oktober 1821).

Mit ergreifender Zärtlichkeit gibt Wolfgang dem Sohne Nachricht vom Tode der Mutter. Nach zwei Tränen, deren Spuren noch auf dem Blatte zu sehen sind, schreibt er: „Auch du vergieße hier Deine Träne, denn sie verdient es; laß sie mit den meinen jenseits des schönen Sonnenstrahles, in dem sie jetzt lächelt, zusammenfließen. Wenn Du sie aber liebst, so weine nur soviel, als sie es wünschen würde, damit sich die männliche Kraft nicht in Tränen auflöse und das Feuer Deiner Laufbahn nicht erlösche. . . . Im Vergleich zu jenen Leiden, von denen sie nunmehr erlöst ist, hat sie wenig Freuden erfahren, und wer weiß, welche ihrer noch gewartet hätten. Sollte der Himmel mir einmal glückliche Stunden verleihen, so würde es mich schmerzen, sie nicht mit ihr teilen zu können; aber die Freude, die ich darüber empfinde, daß sie meine vielen Sorgen und Kümmernisse nun nicht miterleben muß, wiegt diesen meinen Schmerz auf. Du aber, wie immer es Dich schmerzt, daß Du ihre Dir gewidmete Liebe hier auf Erden verloren hast, bedenke, daß diese mir verblieben ist, und so bleibe auch Deine ihr entgegengebrachte Liebe mir! . . . ergib Dich in den Lauf der ewigen Ordnung, widme der zur Ruhe gegangenen Asche Deiner Mutter einige Tränen und setze in männlicher Arbeit Deinen Lebenslauf fort, damit ich Dich bald so umarmen kann, daß ich allein nur das zu bedauern habe, daß Deine liebe Mutter nicht zugegen ist.“

VIII. Kapitel

Johann Bolyai auf der Ingenieur-Akademie (1818—1823)

Die k. k. Ingenieur-Akademie in Wien diente hauptsächlich dazu, tüchtige Offiziere für die technischen Truppen zu erziehen; jedoch wurden nur die besten der Zöglinge dafür verwendet, der Rest kam zu den Linientruppen. Die Akademie kann das Verdienst für sich in Anspruch nehmen, daß eine stattliche Anzahl ruhmbedeckter Truppenführer, hochverdienter Generäle, heldenmütiger Offiziere und ausgezeichneter Kriegsbaumeister aus ihr hervorgegangen ist.

Auf den Vorschlag des Prinzen Eugen v. Savoyen befahl Kaiser Karl VI. durch eine Resolution vom 24. Dezember 1717 die Errichtung „einer förmblichen Ingenieur-Academia in der Kaiserlichen Haupt- und Residenz-Stadt Wien." Sie hat bis 1869 bestanden und ist dann in die k. u. k. technische Militär-Akademie zu Mödling bei Wien aufgegangen, gleichzeitig mit der Artillerie-Akademie.

In den Jahren von 1798 bis 1851 befand sich die Akademie im Gebäude der Savoyschen Ritter-Akademie Ob der Laimgrube; gegenwärtig ist hier in der Stiftgasse das k. u. k. Kriegs-Archiv untergebracht. Sie umfaßte sieben Jahrgänge; außerdem gab es eine besondere Klasse für die Zöglinge, die nach erfolgreichem Besuch der sieben Klassen zu Ingenieur-Korps-Kadetten befördert waren.

Gegenstände des Unterrichts waren: Mathematik, Deutsch, Lateinisch, Französisch, Tschechisch, Schön- und Rechtschreiben, Korrespondenz und Geschäftsakten, Weltgeschichte, Geographie. Dazu kamen als technische Fächer: Freihandzeichnen, Situationszeichnen, geometrisches und perspektives Zeichnen, Befestigungs- und Bauzeichnen. Zur Ausbildung des Körpers dienten Fechten, Tanzen und Reiten. Außerdem machten sämtliche Klassen unter dem Kommando der höchsten Klasse militärische Linienübungen, jedoch nur in den Sommermonaten; in den beiden obersten Klassen wurden die militärischen Waffengriffe eingeübt.

Beim Unterricht nahm die reine und angewandte Mathematik die erste Stelle ein. Lehrstoffe waren in der III. Klasse: Arithmetik und Algebra; in der IV. Klasse: einfache Geometrie, Stereometrie, Nivellierung und ebene Trigonometrie, Aufnahmen am Meßtisch, sphärische Trigonometrie; in der V. Klasse: Kegelschnitte, Lösung von Gleichungen höheren Grades, Elemente der Differential- und Integralrechnung, mathematische Geographie; in der VI. Klasse: Mechanik der festen und flüssigen Körper; in der VII. Klasse hörte der mathematische Unterricht auf, an seine Stelle traten: allgemeine Grundsätze der Taktik,

Befestigungslehre, Angriff und Verteidigung befestigter Orte, unterirdische Befestigung und unterirdischer Kampf, bürgerliche Baulehre, Wasser-, Weg- und Festungsbaulehre.

Über das Lehrverfahren enthält der Administrations-Bericht des Direktors General Bourgeois vom 20. April 1803 Angaben, die von großer Einsicht und freier Auffassung zeugen. „Bei dem wissenschaftlichen Unterricht hat man die analytische Lehrart als diejenige, welche am meisten den Verstand öffnet und die Begriffe zusammen verbinden lehrt, angenommen. Man bestrebt sich, dem Schüler einen deutlichen Begriff von den vorgetragenen Gegenständen durch bestimmte Erklärungen zu geben, und lehret ihn, aus vorausgesetzten Sätzen und Wahrheiten richtige Schlußfolgen zu ziehen. Man sieht darauf, daß er in seinen Schlüssen keine Zwischensätze überspringe, und trachtet eben so sehr, ihm einen geometrischen Geist als die eigentliche Kenntnis der Mathematik beizubringen, weil derjenige, der geometrisch schließt, auch in der Wissenschaft selbst nicht zurückbleibt. Aus dieser Ursache wird wenig oder nichts auswendig gelernt, sondern der Schüler wird angehalten, sich bei seinem Vortrage, so viel es tunlich, anderer Ausdrücke oder Figuren als in dem Lehrbuche zu bedienen, wodurch sich besser erkennen läßt, ob er den Gegenstand in seinem wahren Sinn und Umfang erfaßt habe. Dieser Lehrart wird nicht allein bei den mathematischen Wissenschaften, sondern auch bei dem ganzen übrigen Unterricht gefolgt oder ihr, in so weit es die Gegenstände zulassen, genähert."

General Bourgeois war bis 1811 Direktor der Akademie gewesen, sein Nachfolger wurde Feldmarschall-Leutnant Graf Nobili. Da der Lehrkörper im Jahre 1818, als Johann Bolyai auf die Akademie kam, zum großen Teil aus Männern bestand, die unter Bourgeois gedient hatten, so ist anzunehmen, daß damals dort noch derselbe vortreffliche Geist geherrscht hat als zur Zeit des Bourgeois.

Lehrer der Mathematik, der militärischen Gegenstände und des Situationszeichnens waren hervorragende Offiziere des Ingenieur-Korps; die Taktik wurde von einem kommandierten Offizier der Linientruppen gelehrt. Für die übrigen Fächer waren „bürgerliche" Lehrer angestellt.

Die Zöglinge trugen Uniformen und wohnten in der Anstalt; die Lehrstunden waren Morgens von $7^1/_2$ bis $11^1/_2$ Uhr, Nachmittags von 2 bis 6 und von 7 bis 8 Uhr. „Um die Geisteskräfte nicht zu sehr zu ermüden, ist bei Einteilung des täglichen Unterrichts gesorgt worden, daß die abstrakten Gegenstände des Morgens gegeben werden und daß sie mit anderen, minder schweren wechseln. Der Nachmittag wird größten Teils zur Zeichnung und Wiederholung des morgigen Unterrichts verwandt . . . . Von $11^1/_2$ bis 12, dann von 1 bis 2 und von

6 bis 7 Uhr Abends sind die Erholungsstunden. Während diesen kann die Jugend alle ihr beliebigen Spiele, jene allein ausgenommen, wodurch sie sich beschädigen könnte, nach ihrer Willkür spielen. So oft es die Jahreszeit und die Witterung zulassen, bringt sie diese Zeit in der freien Luft im Garten zu .... Die Disziplin wird genau gehandgabt; sie hat aber nichts knechtisches, und die Jugend wird über die Notwendigkeit derselben belehret .... In all dem übrigen, was die Hausvorschrift nicht befiehlt oder verbietet, und was nicht wider den Anstand oder die Sittlichkeit läuft, kann die Jugend machen, was sie will."

Für die Behandlung der Zöglinge war maßgebend, daß unter den Jünglingen kein anderer Unterschied gemacht werden dürfe, als der, der seinen Grund in besseren Studienfortschritten und besserem sittlichen Betragen habe. Zur Ernennung zu Offizieren wurden dem k. k. Hof-Kriegsrat nur solche Zöglinge empfohlen, die es durch ihren Fleiß und ihr Verhalten verdient hatten, und es ist kaum vorgekommen, daß jemand sich später dieser Ehre als unwürdig erwiesen hätte.

Die Oberleitung der Akademie lag seit 1801 in den Händen des jüngeren Bruders des Kaisers Franz II., des Erzherzogs Johann, eines hervorragenden Mannes, der seine Stellung keineswegs als Ehrenamt ansah, sondern sich der Akademiker mit väterlichem Herzen annahm; er hat die ihm unterstellten Anstalten, die Ingenieur-Akademie und die Kadetten-Akademie zu Wiener Neustadt, zu hoher Blüte gebracht.

Am 24. August 1818 wurde Johann in die IV. Klasse der Akademie aufgenommen. Mit großer Beruhigung nahm Wolfgang hiervon Kenntnis. „Mit Freude habe ich vernommen", schreibt er seinem Sohne, „daß Du bereits im neuen Garten angesetzt bist. Gebe Gott, Du mögest Wurzel fassen, mögest Dich in der Umpflanzung wie die Pflanzen veredeln, mögest hoch wachsen, von dieser niedrigen Erde gen Himmel, und einst von dort mit sanften Schritten und guten Früchten zurückkehren nach dem Lande, aus dem Du emporgewachsen bist."

Bei der Aufnahmeprüfung war Johann der sechste. Man darf vermuten, daß die Entscheidung, ob er nach Wien gehen könne, erst kurz zuvor gefallen war, sodaß er nicht Zeit gehabt hatte, die Lücken wieder auszufüllen, die das wenig glückliche Jahr 1817/18 verursacht hatte. In der folgenden V. Klasse war Johann der zweite. Deutsch konnte er so gut, daß ihm das Lernen in dieser Sprache keine Schwierigkeiten machte. Dagegen fehlte es ihm an Übung im Zeichnen, einem Fache, auf das an der Akademie wegen seiner Wichtigkeit für den künftigen Beruf der Zöglinge großer Wert gelegt wurde. Aber auch hierin machte er bald gute Fortschritte. „Mein Sohn hat mir zwei Faszikel mit Zeich-

nungen geschickt: sie sind über Erwarten gut; Köpfe, Hände, Füße, ganze Körper, aber nur Konturen; zum Herbst verspricht er auch schraffierte und granierte zu schicken" (Wolfgang an Bodor, 3. September 1819).

Größere Schwierigkeiten hatte es für Johann, sich an die militärische Zucht und Unterordnung zu gewöhnen. Der Vater kannte seinen Sohn sehr gut, als er ihn deshalb mit Nachdruck warnte: „Ich rate Dir nur, gegen andere sanft zu sein, sie zu schätzen, den Vorgesetzten zu gehorchen und diejenige Bescheidenheit, die den Gelehrten ebenso ziert wie den Jüngling die Schamhaftigkeit, zu pflegen. Lerne die Leidenschaften beherrschen, damit das Licht der Klugheit wie die Sonne über die wolkentürmenden Stürme scheine." Einer der aufsichtführenden Offiziere, der Pionier-Hauptmann Gideon Halász, dem er vom Grafen Kemény empfohlen war, hat sich seiner angenommen und ihm über die Anfangsnöte hinweggeholfen.

Am Anfang des Jahres 1820 erlitt die stille Arbeit der Akademie eine schwere Störung. Schon zu Weihnachten 1819 war es zwischen der V. Klasse, der Johann damals angehörte, und der VI. Klasse zu erbittertem Haß gekommen, die Schüler hatten sich aber in Folge des Eingreifens der VII. Klasse wieder versöhnt. Allein der wiederhergestellte Frieden zeitigte keine günstigen Folgen, denn die jetzt verbrüderten ehemaligen Gegner vollbrachten einen Gewaltstreich, der zu scharfem Einschreiten nötigte, indem sie am 20. Januar einen Sappeur-Unteroffizier, der durch barsches Auftreten den Groll der gesamten Zöglinge erregt hatte, tätlich angriffen und mißhandelten. Der Direktor, Graf Nobili, der mit vollem Recht in der VII. Klasse die Aufwiegler vermutete, drohte den Zöglingen dieser Klasse, daß er keinen zur Erlangung einer Offiziers-Stelle empfehlen würde. Einer der Zöglinge stellte jetzt an den Inspektions-Hauptmann Halász die Forderung, daß der Direktor seine Drohung zurücknehme. Als dies Begehren abgelehnt wurde, verließen am 21. Januar die meisten Zöglinge der oberen Klassen in aufrührerischer Weise das Akademie-Gebäude, wobei es ihnen auch noch gelang, einen im Arrest befindlichen Kameraden gewaltsam zu befreien.

Diese bedauerlichen Vorfälle, die in der Geschichte der Akademie einzig dastehen, machten in Wien peinliches Aufsehen. Erzherzog Johann verfuhr sofort mit der größten Umsicht und Tatkraft. Er wußte durch taktvolles Auftreten und durch die Macht seiner Persönlichkeit die Zöglinge zur Rückkehr in die Anstalt zu bewegen und die erregten Gemüter zu beruhigen; wo strenge Bestrafung nötig war, ließ er sie eintreten. Am 27. April wurde endlich eine Maßregel in Vollzug gesetzt, die längst beschlossen, aber absichtlich verzögert worden war: Graf Nobili erhielt den Abschied und wurde durch den Generalmajor Baron

Herzogenberg ersetzt. Der neue Direktor war ein Mann von eiserner Strenge. Er sorgte dafür, daß die Zöglinge weder bei Tag noch bei Nacht ohne Aufsicht blieben. Die Erlaubnis, Sonntags auszugehen und auswärts zu speisen, wurde eingeschränkt; jüngere Schüler durften nicht ohne Begleitung die Anstalt verlassen. Während der Ferien im September 1820 wurde sogar kein Zögling nach Haus beurlaubt.

Johann scheint an dem „Aufruhr" im Januar 1820 nicht beteiligt gewesen zu sein. Hierfür spricht vor allem der Umstand, daß Wolfgang ihn in einem Briefe vom 4. April 1820 bittet, beim Erzherzog Johann zu seinen Gunsten einzutreten, nämlich bei diesem vorstellig zu werden, daß er Wolfgangs Bewerbung um die Stelle eines Forstinspektors in Hermannstadt unterstütze. Zugleich geht aus diesem Briefe hervor, daß sich schon vor dem April 1820 ein Vorfall abgespielt hatte, der für Johann von Bedeutung wurde. Als Erzherzog Johann einmal die Akademie besichtigte, erzählt K. Szily nach Aufzeichnungen Gregor Bolyais, kam er auch in Johanns Klasse. Johann arbeitete die ihm vom Lehrer gestellte Aufgabe schnell aus, ging dann zur nächsten über und fuhr so fort. Der Erzherzog, über das Genie des Jünglings erstaunt, unterbrach ihn und sagte zum Lehrer: »Die übrigen Schüler sollen diesem untergeordnet werden, er weiß mehr als die ganze Klasse«. Zum Verständnis dieses Ausspruchs muß bemerkt werden, daß damals in der Mathematik eine eigenartige Einrichtung bestand: neben dem Klassenunterricht gab es einen gegenseitigen Unterricht der Schüler, bei dem die befähigsten Akademiker „Korrepetitoren" waren.

„Kurz darauf", berichtet K. Szily, „kamen Magnaten aus Siebenbürgen nach Wien zum Erzherzog. Dieser erzählte ihnen, welch' ein genialer Zögling aus ihrer Heimat auf der Akademie sei, und fragte sie, ob sie seinen Vater kännten. Nicht bloß daß sie ihn kännten, sie seien mit ihm sogar gut befreundet. Sie erzählten, auch der Vater sei ein Genie. Der Erzherzog ließ dem Vater sagen, daß er an seinem Sohne große Freude habe und dieser, wenn er sich im übrigen gut betrage, auf eine große Laufbahn rechnen dürfe."

Die beiden folgenden Jahre waren Jahre ruhiger und fruchtbarer Arbeit. Johann war auch in der VI. und VII. Klasse der zweite. „Von meinem Sohne höre ich gute Nachrichten", meldet Wolfgang im März 1821 an Bodor, „er ist auch im Zeichnen gut, jetzt ist er hineingekommen; in der Musik ist nur einer etwas besser, und der nimmt bei Meiseler, dem ersten Geiger in Wien, per 5 rhein. Gulden die Stunde Unterricht; mein Sohn ist natürlich nicht in der Lage, Stunden zu nehmen, aber dieser eine, der etwas besser spielt als er, nimmt ihn Sonntags mit zu Meiseler, wo sie mit noch einem vierten die schönsten

Quartette machen; das ist ihm eine gute Übung ohne Kosten. In bezug auf Studium und Talent distinguieren ihn der General und die übrigen Offiziere und Professoren; ich weiß es aus gewissen Daten."

Dieser Brief zeigt, daß Johann vom Vater knapp gehalten wurde. Wolfgang geriet um diese Zeit immer mehr in Schulden und konnte dem Sohn nur mit Mühe ab und zu 10 bis 20 Gulden als Taschengeld schicken; Johann hat wohl schon damals gelernt, mit wenig Haus zu halten, und das war gut für seine Zukunft. Ein schönes Zeichen für die Teilnahme, die er zu erwecken wußte, ist es, daß sein ehemaliger Hauslehrer Josef v. Szilágyi, der selbst arm war, ihm während zweier Jahre 40 Gulden schickte. Auch von anderer Seite erhielt Johann eine willkommene Unterstützung. Am 15. Juli 1821 berichtet Wolfgang an Bodor: „Lengyel schreibt, daß Graf A. Kendeffy von seinem ungarländischen Pachteinkommen für meinen Sohn 250 rhein. Gulden zu gewähren geruhte ... Dieses Geld kommt sehr zur rechten Zeit, indem ich gerade vor zwei Stunden einen Brief von Johann erhalten habe, worin er schreibt, daß alle aus seiner Klasse schon längst reiten, nur er allein nicht, was fatal ist; er hatte nämlich schon im Winter geschrieben, daß der General ihn habe rufen lassen, als die Reihe noch gar nicht an ihm war, und ihm gesagt habe, daß er es sehr gerne sähe, wenn Johann in die damalige Kavallerie-Vakanz ginge, seine Eltern möchten doch das kleine Opfer bringen, er schrieb auch damals, wieviel dieses kleine Opfer auf ein Jahr beträgt, es ist nicht einmal ganz so viel, wieviel Graf Kendeffy gewährt hat".

War die Ordnung der Anstalt auch streng, so hat es Johann doch nicht an Verkehr in der guten Gesellschaft gefehlt. Graf Nicolaus Kemény sah ihn, wenn er in Wien war, bei sich, und auch bei anderen Bekannten seines Vaters, die sich als hohe Beamte in Wien aufhielten, wie Emerich Szent-Györgyi und Samuel Bodoki, machte er Besuch. Oft war er auch im Hause des Grafen Alexius Teleki, bei dem ein Landsmann, von ihm, Karl Szász, seit 1817 Hauslehrer war. Karl Szász, geboren am 25. Januar 1798 zu Salzburg (Vizakna) bei Hermannstadt, hatte das Kollegium zu Nagyenyed besucht und darauf Jura studiert. Am Ende des Jahres 1820 ist er in die Heimat zurückgekehrt, weil er als Professor der Rechte nach Nagyenyed berufen wurde. Über Johanns Verkehr mit Szász wird im X. Kapitel genauer berichtet werden. Hier sei nur bemerkt, daß Szász sich seit 1848 in Maros-Vásárhely aufgehalten hat; im Herbst 1851 wurde er der Nachfolger von Wolfgang Bolyai, ist aber noch vor diesem am 23. Oktober 1853 gestorben.

Unter den Lehrern hat dem jungen Bolyai der Hauptmann Johann Wolter v. Eckweihr am nächsten gestanden. Im Jahre 1789 zu König-

grätz in Böhmen geboren, hatte er die Ingenieur-Akademie besucht und war im Herbst 1818 als Lehrer an diese zurückgekehrt. Er erteilte im besonderen der IV. Klasse den Unterricht in Arithmetik und Geometrie. Von 1823 bis 1835 war Wolter in Arad bei der Geniedirektion beschäftigt; dort ist Johann von 1826 bis 1830 als Leutnant sein Untergebener gewesen. Nachdem er als Festungsingenieur Vorzügliches geleistet hatte, ist Wolter 1857 als Feldmarschalleutnant zu Krakau gestorben.

Unter den älteren Lehrern schätzte Johann den Major Michael Lencker, der, 1778 zu Wien geboren, seit 1804 an der Akademie unterrichtete. Die von Lencker verfaßten Lehrbücher der höheren Geometrie und der mathematischen Geographie lassen erkennen, daß er ein klarer Kopf war. Johann war von Wolfgang auf Lencker hingewiesen worden: „Lencker benutze unter allen Umständen, Du wirst es bereuen, wenn Du es versäumst".

Im September 1822 hatte Johann die VII. Klasse beendet. Von den 19 Zöglingen dieser Klasse wurden 7 zu Ingenieur-Korps-Kadetten befördert und blieben noch ein Jahr auf der Akademie, unter ihnen Johann als der zweite. Bei der Rangeinteilung, die jährlich zweimal in jeder Klasse stattfand, hatten die Zöglinge ein gewichtiges Wort mitzusprechen. Sie stellten in geheimer Abstimmung die Rangliste auf, allerdings mit Vorbehalt der Entscheidung durch die Lehrer und den Direktor; von den Vorgesetzten wurde jedoch der Beschluß der Klasse ernstlich berücksichtigt, denn die Kameraden urteilten fast immer unparteiisch und sachverständig. Als im September 1822 die Rangordnung der VII. Klasse bestimmt wurde, hatten die Lehrer Johann an die erste Stelle gesetzt. Die Schüler gaben ihm aber nur die zweite. Der Direktor schloß sich den Schülern an, weil Johann zwar in der Befestigungslehre und der bürgerlichen Baukunst als erster gelten mußte, indessen Josef Czermák von der III. Klasse an beständig den ersten Platz in den übrigen wissenschaftlichen Fächern behauptet hatte. Czermák ist schon früh, 1828, als Oberleutnant gestorben. Johanns Zeugnis ist wahrhaft glänzend; fast überall hat er die beste Note, nur in Geschichte, Französisch und Zeichnen ist das Ergebnis um einen Grad geringer.

Während der ganzen Zeit des Aufenthaltes auf der Akademie hat die väterliche Liebe, Fürsorge und Ängstlichkeit Johann begleitet. Die raschen Fortschritte und die glänzenden Erfolge des Sohnes waren in den schweren Jahren von 1818 bis 1823 der einzige Trost für Wolfgang; Johann war „die Kette, die ihn im Gefängnis des Lebens zurückhielt" (Brief an Bodor vom 2. April 1817). Zahlreich sind die guten

Ratschläge, die er dem Sohne gibt. Zum Teil ist darüber schon berichtet worden; es möge genügen, einige bezeichnende Stellen hinzuzufügen. Er solle die Zeit gut ausnützen. „Ich glaube immer mehr, daß ein großer Mathematiker nur der werden kann, der mit vorzüglichem Geiste zu rechter Zeit, mit der rechten Art daran geht, ... mit unermüdlicher, langer Übung eine Fertigkeit wie in der Sprache sich erwirbt." Als Johann in die VI. Klasse tritt, wiederholt er die Mahnung. „Die Jahre verfließen und hinterlassen nichts demjenigen, der nicht mit dem Fernrohr der Klugheit in das Gebiet der Zukunft blickt und nur die gegenwärtigen Blumen pflückt — wehe dem, dem die vergangenen Zeiten bloß durch ihre Verwüstungen gezeigt werden — und glücklich der, der die Jahre zu benutzen weiß und wie der Baum jedes Jahr um einen Ring stärker wird."

Auch an Ratschlägen wegen der Lebensführung fehlt es nicht; hier ist Wolfgang oft recht breit und umständlich. Am meisten ist er besorgt um die Reinheit des Sohnes. „Fürchte den ersten Schritt, denn am Rande des Abgrunds ist ein grundloser Wirbel, wo es kein Stillstehen mehr gibt — bewahre Dich vor dem Schmutze, der nicht mehr abgewischt werden kann .... Nur der blüht auf an Körper und Seele, nur der reift zum Manne, nur der hat Kraft, Willen und Beharrlichkeit, nur dessen Genie leuchtet klar und beständig, dessen Urquell in himmlischer Reinheit verbleibt". Je näher der Austritt aus der Akademie heranrückt, um so häufiger und dringender erhebt sich seine Stimme. „Bewahre Deine Reinheit! Gib immerdar Acht, daß das im Himmel entzündete Feuer wie im Tempel der Vesta nicht erlösche — jeder Funken irdischer Freuden, auf den Du verzichtest, wird wie ein glänzender Stern am Himmel Deines späteren Lebens leuchten." Und als ob er voraussähe, daß seine Warnungen vergeblich sein werden: „Ich bin um Dich am meisten wegen der Duelle und wegen der Weiber besorgt".

Johann hat der Akademie viel zu verdanken gehabt. Vor allem Jahre eines regelmäßigen, ruhigen Lebens, in denen sich seine besten Fähigkeiten entwickeln konnten. Dann Ordnung und Pünktlichkeit, Tugenden, die seinem Vater fremd waren. Endlich eine gründliche mathematische Ausbildung, die ihm das Rüstzeug lieferte, dessen er für seine Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie bedurfte; mehr wäre hier weniger gewesen, es hätte ihn von der Aufgabe abgelenkt, zu deren Lösung er berufen war. Eins freilich hat auch eine so vortreffliche Anstalt, wie die Ingenieur-Akademie nicht vermocht, nämlich aus dem Mathematiker einen Offizier zu machen, der ganz in den Pflichten seines Berufes aufging. Das hätte aber auch niemand vermocht; denn wer gebietet dem „tyrannischen Gedanken", der das Genie peinigt und beseligt?

IX. Kapitel

Johann Bolyai im Militärdienst (1823—1833)

Nur etwa zehn Jahre hat Johann Bolyai der österreichischen Armee als Ingenieuroffizier angehört. Daß seine glänzend begonnene militärische Laufbahn ein so rasches Ende genommen hat, lag in einer wahrhaft tragischen Verkettung von Umständen.

Am 1. September 1823 wurde Johann zum Unterleutnant bei der Fortifikationsdirektion in Temesvár ernannt; daß er auf diese Art wieder in die Nähe seiner Heimat kam, war gewiß ein Zeichen des Wohlwollens seiner Vorgesetzten. Am 17. September reiste er von Wien ab und traf am 30. September in seiner Garnison ein. Schon am 3. November schreibt er von hier aus seinem Vater, sein Vorsatz stehe fest, ein Werk über die Parallelen herauszugeben; er habe aus nichts eine neue Welt geschaffen. Über die Entdeckung der absoluten Geometrie durch Johann Bolyai wird in den beiden nächsten Kapiteln ausführlich berichtet werden. Es ist jedoch unumgänglich, schon in aller Kürze hier auf diese Seite seiner Tätigkeit einzugehen, die seinen Lebensgang wesentlich beeinflußt hat.

Die Muße, die ihm der Dienst ließ, hat Johann auch weiterhin dazu benutzt, um sich seinen geometrischen Untersuchungen zu widmen, und als er im Frühjahr 1825 seinen Vater in Maros-Vásárhely besuchte, konnte er ihm „den Entwurf der absoluten Raumlehre" vorlegen; es ist sehr wahrscheinlich, daß dieser Entwurf im wesentlichen mit den ersten 33 Paragraphen des 1831 gedruckten *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* übereinstimmte. Im Laufe des Jahres 1825, spätestens Anfang 1826, hat Johann diesen Entwurf auch an seinen früheren Lehrer, den damaligen Hauptmann Wolter v. Eckwehr, damals in Arad, geschickt, mit dem er in Briefwechsel stand.

Über einen Besuch seines Sohnes berichtet Wolfgang am 22. Februar 1825 an Bodor: „Mein Sohn ... ein großer, kräftiger, schöner Jüngling, die soldatische Tapferkeit mit der Schamhaftigkeit der Unschuld überhaucht — er ist kein Kartenspieler, trinkt weder Wein noch Branntwein noch Kaffee, raucht nicht und schnupft nicht, er rasiert sich auch noch nicht, hat nur einen Flaum — ein außerordentlicher Mathematiker, ein wahres Genie, exzellenter Violinspieler — liebt unter allen Berufen am meisten den militärischen; nur das Otium würde er noch vorziehen, um

arbeiten zu können, hat aber auch neben dem Dienst schon sehr viel gearbeitet. Er läßt Dich grüßen."

Während dieses Zusammenseins im Februar und März 1825 ist es zu den ersten Zerwürfnissen zwischen Vater und Sohn gekommen. Johann fand für sein neues geometrisches System bei Wolfgang nicht die Anerkennung und das Verständnis, worauf er gerechnet hatte. Dazu kamen Familienangelegenheiten. Wolfgang hatte sich am 31. Dezember 1824 zum zweiten Male verheiratet. Theresia Nagy, seine zweite Gattin, geboren den 11. Februar 1797, war die Tochter eines Eisenhändlers in Maros-Vásárhely. Sie hatte in Hermannstadt eine gute Erziehung genosssen; auch sang sie schön und spielte die Harfe. Am 13. Mai 1826 hat sie Wolfgang einen Sohn Gregor geschenkt; ein später geborenes Töchterchen ist bald gestorben. Leider fing Theresia bald an zu kränkeln und ist schon am 2. April 1833 der Lungentuberkulose erlegen.

Wie es scheint, verlangte Johann bei seinem Besuch die Auszahlung des kleinen mütterlichen Erbteils. Wolfgang geriet hierdurch in große Verlegenheit, denn die Last seiner Schulden hatte sich durch seine Heirat noch vermehrt. Während Wolfgang in Geldangelegenheiten stets ein Kind geblieben ist, war Johann ein guter Rechner.

Diesmal kam es noch zu einer schnellen Versöhnung. „Mein Vulkansohn ist sanfter geworden", schreibt Wolfgang am 24. April an Bodor, „schon zweimal hat er aus Temesvár geschrieben".

Über Johann als Unterleutnant haben wir auch einen Bericht von anderer Seite. Der Vater des um die Bolyai-Forschung verdienten Baumeisters Franz Schmidt in Pest, Anton Schmidt, war 1817—1860 Baumeister in Temesvár und hatte öfters Militärbauten herzustellen. Er erzählte in späteren Jahren von einem Genieoffizier, einem Siebenbürger, mit dem er sich gefürchtet habe in Berührung zu kommen. Dieser habe, um die Stärke seines Armes und die Güte seiner Damaszener Klinge zu beweisen, seinen Besuchern gezeigt, wie er mit Einem Hiebe starke Nägel abschlug, die in den Türpfosten eingeschlagen waren. Das war Johann Bolyai.

Die Damaszener Klinge diente aber nicht nur dazu, Nägel abzuhauen. Johanns Heftigkeit und Leidenschaftlichkeit verwickelten ihn oft in Ehrenhändel, aus denen er, der auf der Akademie als bester Fechter gegolten hatte, stets siegreich hervorging. Er soll in einer Garnison sich an einem Tage mit dreizehn Kavallerieoffizieren geschlagen und alle besiegt haben; dabei hatte er nur die Bedingung gestellt, daß er sich nach je zwei Duellen durch das Spiel auf seiner geliebten Violine erholen dürfe.

Am 26. März 1826 wurde Johann nach Arad versetzt, wo er länger als vier Jahre, bis zum 2. September 1830, gestanden hat. Er traf hier

mit Johann Wolter v. Eckwehr zusammen, der als Hauptmann sein unmittelbarer Vorgesetzter wurde. Mit seinen dienstlichen Leistungen scheint man damals zufrieden gewesen zu sein, denn er wurde bereits am 8. September 1827 zum Oberleutnant befördert.

Wie die militärischen Akten zeigen, ist Johann, der sich bis dahin einer guten Gesundheit erfreut hatte, seit 1826 wiederholt krank gewesen; vielleicht hat er sich schon in Arad oder auf Kommandos nach Großwardein und Szegedin das Wechselfieber zugezogen, von dem er in einem Briefe aus dem Jahre 1841 spricht.

Seit dem Besuche im Februar und März 1825 bis zu seinem Ausscheiden aus dem Heere im Juni 1833 ist Johann nicht wieder in Maros-Vásárhely gewesen. Am 2. September 1830 wurde er nach Lemberg versetzt. Ehe er Ungarn verließ, hat er jedoch seinen Vater noch einmal gesehen, und zwar war es ein „zufälliges Zusammentreffen"; wo es stattgefunden hat, wissen wir nicht. Es ist die Veranlassung geworden, daß Johann „das Wesen der Sache [seiner geometrischen Untersuchungen] in lateinischer Sprache verfaßte und Anfang 1831 seinem Vater übergab." Diese lateinische Abhandlung ist der schon erwähnte *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, der dem ersten, 1832 erschienenen Bande des *Tentamen* als Anhang beigegeben ist. Es wurden jedoch auch Sonderabzüge hergestellt, die im Juni 1831 fertig waren: für die Druckkosten hat Johann 104 Gulden 54 Kreuzer bezahlt.

Einer der Sonderabzüge wurde alsbald, am 20. Juni 1831, an Gauss gesandt. Bei der erwähnten Zusammenkunft waren nämlich Wolfgang und Johann wieder in Streit geraten, weil der Vater die Verdienste des Sohnes, nach dessen Meinung, nicht zu würdigen wußte. „Zur Einsicht gelangt", schreibt Johann, „daß hier mit Gründen nichts auszurichten sei, hoffte ich ihm nunmehr durch Autorität die gebührende Achtung für die Asymptoten einzuflößen. Ich nannte den einen (Gauss) bemerkend, daß dieser kolossale Geometer gewiß nicht nur leicht verstehen, sondern auch Beifall schenken und den wahren Wert davon anerkennen würde, und schlug vor, es diesem großen Manne zu senden. Darauf ereiferte sich der Herr Vater noch mehr; der Vorschlag gefiel ihm um so mehr, als er wähnte, durch die Autorität [von Gauss] gegen mich die quasi Waffe zu gewinnen."

Immer wenn die beiden Bolyai es mit Gauss zu tun hatten, waltete ein besonderer Unstern. Jener Sonderabdruck gelangte „wegen der fatalen Choleraumstände" nicht in dessen Hände. Ein zweiter Abdruck, den Wolfgang im Januar 1832 folgen ließ, wurde im Februar durch Josef v. Zeyk, einem Sohn des Barons Daniel v. Zeyk, der mit Gauss und Wolfgang in Göttingen studiert hatte, dem großen Geometer übergeben.

Dieser schrieb am 14. Februar 1832 unter dem ersten Eindruck an seinen Schüler und Freund Gerling in Marburg:

„Noch bemerke ich, daß ich dieser Tage eine kleine Schrift aus Ungarn über die Nicht-Euklidische Geometrie erhalten habe, worin ich alle *meine* eigenen *Ideen und* ***Resultate*** wiederfinde, mit großer Eleganz entwickelt, obwohl in einer für jemand, dem die Sache fremd ist, wegen der Konzentrierung etwas schwer zu folgenden Form. Der Verfasser ist ein *sehr* junger österreichscher Offizier, Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten hatte, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren, die sie durch das eigene Nachdenken dieses jungen Mannes erhalten haben. Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Größe."

Gauss ließ in einem Briefe an Wolfgang vom 6. März 1832, über den im XI. Kapitel ausführlich berichtet werden wird, Johann seiner besonderen Hochachtung versichern. Eine Abschrift des Briefes schickte Wolfgang seinem Sohne nach Lemberg und fügte hinzu: „Gaussens Antwort hinsichtlich Deines Werkes ist sehr schön und gereicht unserem Vaterlande und unserer Nation zur Ehre. Ein guter Freund sagt, es wäre eine große Satisfaktion."

Ganz anders wirkte das Verhalten von Gauss auf Johann. Daß Gauss den *Appendix* keiner öffentlichen Anerkennung würdigte und die Priorität der Entdeckung für sich in Anspruch nahm, bildete für Johann eine Enttäuschung, die er niemals verwinden konnte. Dazu kam, daß auch sonst die Teilnahme ausblieb, deren sein feuriger Geist bedurfte; denn seine der Zeit vorauseilenden Gedanken blieben unverstanden, und auch die Veröffentlichung im *Tentamen* hatte keinen sichtbaren Erfolg.

Bedenkt man noch, daß Johanns Gesundheit seit 1826 erschüttert war, so ist es erklärlich, daß in ihm jetzt traurige Veränderungen vorgingen. „Die Anerkennung, die ihm die Welt versagte," äußert sich Schlesinger, „ersetzt er durch eine fast krankhafte Selbstverherrlichung, als deren Folge sein bis dahin zwar leidenschaftliches, aber nach den Berichten solcher, die ihn persönlich gekannt haben, überaus liebenswürdiges Wesen, in ein reizbares und mißtrauisches umschlägt. Stolz und verschlossen meidet er die Gesellschaft der Kameraden, seine persönliche Tapferkeit artet in Händelsucht, seine ungeschminkte Wahrheitsliebe in oft verletzende Schroffheit aus."

Am 14. März 1832 war Johann zum Hauptmann zweiter Klasse ernannt worden. Bald darauf wurde er nach Olmütz versetzt, wo er den Dienst am 5. Mai antrat. Von Olmütz aus richtete er am 8. August 1832

eine Bittschrift an Erzherzog Johann, der die ersten 33 Paragraphen des *Appendix* in deutscher Fassung und ein Auszug aus Gaussens Briefe vom 6. März 1832 beigelegt waren. Er wünsche sehnlichst, die in dienstfreien Stunden angestellten Untersuchungen aus dem Gebiete der Mathematik vollends auszuarbeiten. Dies sei jedoch nur bei ungeteilter Verwendung der Geisteskräfte möglich, besonders da er bei seinem durch anhaltende nervöse Übel geschwächten Zustande das Schlimmste für seine Gesundheit besorgen müsse. Er bitte daher, ihn auf drei Jahre aus dem eigentlichen laufenden Dienste zu entfernen, nach Hermannstadt in die heimatliche Luft zu versetzen und zugleich einen bei seinem Vater in Maros-Vásárhely zu verbringenden Urlaub von drei Monaten zu genehmigen.

Das Gesuch wurde abgelehnt. Damals sind wohl in Johanns Konduitenliste die Vermerke eingetragen worden: „Wurde im Jahre 1832 wegen eines Schriftchens vom Hofrat Ritter von Gauss, einem der größten Mathematiker, anerkannt. . . . Als Professor der höheren Mathematik geeignet.“ Was diese amtlichen Berichte weiter enthalten, zeigt, daß Johann sich zu dieser Zeit in einem bedauernswerten Zustand befand: „Wortkarg, reizbar, jähzornig, meidet den Umgang mit Offizieren, im Ingenieurdienst ohne Eifer, leidenschaftlicher Schachspieler.“ „Wurde wegen Mangel an Diensteifer und wegen auffahrenden Benehmens im Jahre 1833 verwarnt.“

Die letzte Bemerkung steht wohl in Beziehung zu einem Zusammenstoß Johanns mit preußischen Grenzwächtern. Auf der Rückkehr von einer Reise nach dem preußischen Schlesien hatte er in Schwarzbach an der Weichsel übernachtet. Bei der Abfahrt am nächsten Morgen, dem 7. Juli 1832, kam es zu Streitigkeiten mit den Zollbeamten, weil Johann sich weigerte, einen an seinem Wagen angebrachten Kasten zu öffnen. In Olmütz angekommen reichte er bei der vorgesetzten Behörde eine Beschwerde gegen die Grenzwächter ein, wurde jedoch durch die Fortifikations-Lokaldirektion veranlaßt, diese zurückzuziehen. Allein jetzt verklagte ihn der preußische Grenzkommissar Bischoff bei seinen Vorgesetzten. Johann wurde zur Äußerung aufgefordert und hat sich in einer noch erhaltenen, 7 Folioseiten langen Denkschrift vom 14. November 1832 gegen die Anklage verwahrt; seine Darlegungen lassen erkennen, in wie hohem Grade er damals überreizt war. Die ärgerliche Angelegenheit kam nun zur Kenntnis der obersten Behörde in Wien, und die Folge war, daß Johann am 28. Mai 1833 durch Reskript des Armeeoberkommandos als halbinvalid vom 16. Juni ab in den Ruhestand versetzt wurde. Der Zusatz „mit Aussicht auf spätere Wiederanstellung“ zeigt, daß man ihn nur ungern gehen ließ; man wünschte,

„daß er sich beruhige“, und hoffte, seine Dienste später wieder in Anspruch zu nehmen; hierzu ist es freilich nicht gekommen.

Am 15. Juni 1833 ist Johann von Olmütz nach Maros-Vásárhely abgereist. Bei der Hermannstädter Kriegskasse waren ihm als jährliche Pension 280 Gulden angewiesen worden; später, jedoch erst nach 1849, ist dieses Ruhegehalt auf 400 Gulden, vom Jahre 1858 an auf 420 Gulden erhöht worden.

Johann war des Militärdienstes überdrüssig. Er fühlte sich berufen, eine „Reformation der Mathematik“, ja, wie sein Gesuch an den Erzherzog Johann bereits durchblicken läßt, eine Reformation des ganzen Menschengeschlechts herbeizuführen, und war fest entschlossen, alle Kräfte an die Erreichung dieser großen Ziele zu setzen. Gewiß war sein Streben edel und rein, allein er ging neuen Enttäuschungen und Mißerfolgen entgegen.

X. Kapitel

Die Entdeckung der absoluten Geometrie durch Johann Bolyai

Erster Teil: Versuche das XI. Euklidische Axiom zu beweisen (1820—1823)

In Johann Bolyais Nachlaß finden sich umfangreiche Aufzeichnungen, in denen er über die Entstehung seiner *absoluten Geometrie* berichtet. Ein Teil davon stammt aus der Zeit zwischen 1833 und 1835, ein anderer aus der Zeit zwischen 1851 und 1858. Da es sich nicht um druckfertige Ausarbeitungen, sondern um unvollendete Entwürfe mit zahlreichen Lücken, Wiederholungen, Streichungen, Einschaltungen im Texte und auf einzelnen Zetteln handelt, so mußte auf einen vollständigen Abdruck verzichtet werden. Wohl aber ließ sich aus dem vorliegenden Stoff, in Verbindung mit einigen noch erhaltenen Briefen von Wolfgang an Johann und von Johann an Wolfgang, eine Geschichte der Entdeckung der absoluten Geometrie durch Johann Bolyai zusammenzustellen, bei der im wesentlichen dieser selbst und sein Vater das Wort führen. Wie wichtig eine solche urkundliche Darstellung ist, liegt auf der Hand; ihr Wert ist um so größer, als es wohl nur wenige Fälle gibt, in denen der Entdecker einer grundlegenden mathematischen Lehre selbst über deren Entstehung in so eingehender und zuverlässiger Weise berichtet hat, wie es hier der Fall ist.

Die erste Anregung zur Beschäftigung mit der Parallelentheorie erhielt Johann durch seinen Vater, der ihn selbst in der Mathematik unterrichtete und ihn „auf die Unvollkommenheit der Theorie der Parallelen, der Geraden und anderer Grundlehren aufmerksam machte." In einem Briefe vom 4. April 1820, auf den noch wiederholt zurückzukommen sein wird, hat Wolfgang seinem Sohne auf dessen Wunsch mitgeteilt, was er ihn über die Parallelen gelehrt hatte. „Hier hast du das wertlose Axiom, das ich für Kinder erdacht hatte; daraus kommt es leicht *per se* heraus. Da es nur aus Wenigem besteht, so schreibe ich es auf Deinen Wunsch ab. Es ist: *eadem internorum summa aliter partita*. Ich schreibe es aus meinem Werke ab." In der Tat findet sich das Axiom und der Beweis, daß daraus das XI. Axiom folgt, im *Tentamen* und ist im zweiten Teile dieses Buches, S. 98, 99 wiedergegeben. Dagegen hat Wolfgang seine sonstigen im *Tentamen* dargelegten Ge-

danken über einen möglichen Beweis des XI. Axioms, wie Johann ausdrücklich versichert, vor ihm geheim gehalten und ihm auch später nur Bruchstücke davon mitgeteilt. Es ist nicht schwer zu erkennen, worauf Wolfgangs zwiespältiges Verhalten beruhte. Er wünschte durchaus nicht, daß sein Sohn sich mit der Parallelentheorie beschäftigte, die ihm selbst „sein Leben verdorben hatte", konnte aber doch dem Drange nicht widerstehen, vor ihm darüber zu reden. Sein frühreifer Sohn hat ihn verstanden und die Worte treu im Herzen bewahrt. „Einst äußerte er, derjenige, der einen Beweis für das elfte Axiom fände, verdiente einen Diamanten so groß wie der Erdball. Ein anderes Mal: Dem dieses einst gelingen wird, setzt, Sterbliche, ihm ein ewiges Denkmal."

Und so kam, was kommen mußte. Als Johann im Herbst 1818 Zögling der Ingenieur-Akademie in Wien wurde, hatte er schon „durch die eigene Vortrefflichkeit und hohe Wichtigkeit der Aufgabe gereizt" den Entschluß gefaßt, „es sei wie es will, hierin das Möglichste zu tun", und die Parallelentheorie wurde bald zu seiner „Lieblingsbeschäftigung".

„Zu einem möglichen Beweise des elften Axioms schlug ich zuerst den Weg ein, zu beweisen, daß die mit einer Geraden gleichlaufende, das ist davon in einer Ebene überall gleichweit abstehende Linie auch eine Gerade sei, und behufs dessen die Eigenschaften einer solchen Linie für den Gegenfall zu untersuchen"; wir wissen jetzt, daß schon Saccheri (1733) und Lambert (1766) denselben Weg betreten und auf ihm ein beträchtliches Stück zurückgelegt hatten. Im Besonderen suchte Johann zu zeigen, daß „eine regelmäßige Polygonallinie, welche in allen Brechungspunkten von einer Geraden gleich absteht", diese notwendig schneiden müsse, und traf so mit seinem Vater zusammen, der, wie wir gesehen haben, in seiner „Göttingischen Parallelentheorie" ebenfalls eine solche regelmäßige Polygonallinie betrachtet hatte.

Als Johann im Frühjahr 1820 dem Vater von seinem Versuche, das XI. Axiom zu beweisen, Mitteilung machte, war dieser aufs äußerste erschrocken und ermahnte den Sohn mit beweglichen Worten, davon abzulassen.

„Du darfst die Parallelen auf jenem Wege nicht versuchen; ich kenne diesen Weg bis an sein Ende — auch ich habe diese bodenlose Nacht durchmessen, jedes Licht, jede Freude meines Lebens sind in ihr ausgelöscht worden — ich beschwöre Dich bei Gott! laß die Lehre von den Parallelen in Frieden — Du sollst davor denselben Abscheu haben, wie vor einem liederlichen Umgang, sie kann Dich um all' Deine Muße, um die Gesundheit, um Deine Ruhe und um Dein ganzes

Lebensglück bringen. — Diese grundlose Finsternis würde vielleicht tausend NEWTONsche Riesentürme verschlingen, es wird nie auf Erden hell werden, und das armselige Menschengeschlecht wird nie etwas vollkommen Reines haben, selbst die Geometrie nicht: es ist in meiner Seele eine tiefe und ewige Wunde; behüt' Dich Gott, daß diese sich [bei Dir] je so tief hineinnagen möchte. Diese raubt einem die Lust zur Geometrie, zum irdischen Leben: ich hatte mir vorgenommen, mich für die Wahrheit aufzuopfern; ich wäre bereit gewesen zum Märtyrer zu werden, damit ich nur die Geometrie von diesem Makel gereinigt dem menschlichen Geschlecht übergeben könnte. Schauderhafte, riesige Arbeiten habe ich vollbracht, habe bei weitem Besseres geleistet als bisher [geleistet wurde], aber keine vollkommene Befriedigung habe ich je gefunden; hier aber gilt es: *si paullum a summo discessit, vergit ad imum.* — Ich bin zurückgekehrt, als ich durchschaut habe, daß man den Boden dieser Nacht von der Erde aus nicht erreichen kann, ohne Trost, mich selbst und das ganze menschliche Geschlecht bedauernd. Lerne an meinem Beispiel; indem ich die Parallelen kennen wollte, blieb ich unwissend, diese haben mir all' die Blumen meines Lebens und meiner Zeit weggenommen. Hier steckt sogar die Wurzel aller meiner späteren Fehler, und es hat darauf aus den häuslichen Gewölken geregnet. — Wenn ich die Parallelen hätte entdecken können, so wäre ich ein Engel geworden, wenn es auch niemand gewußt hätte, daß ich sie gefunden habe."

„Glaube mir! und lerne jetzt, schreite vorwärts, merke Dir an, was Du nicht verstehst, wo Du Mängel findest und gehe dann weiter. . . . Ich werde Dir meine Versuche schicken: und dann wirst Du Dich noch jetzt näher davon überzeugen können, was ich euch mit Herrn VAJDA gelehrt habe, welches ich für Kinder am leichtesten gefunden habe; wenn ich Zeit habe, werde ich es vielleicht jetzt abschreiben. Ich kann es Wort für Wort aus meinem Werke abschreiben; wenn das Axiom besteht, so kommt das Übrige *per se* heraus, dieses und auch die anderen. Aber keines von meinen Axiomen ist, in keiner meiner Demonstrationen, so wie es sein sollte. — Es ist unbegreiflich, daß diese unabwendbare Dunkelheit, diese ewige Sonnenfinsternis, dieser Makel in der Geometrie zugelassen wurde, diese ewige Wolke an der jungfräulichen Wahrheit."

„Versuche es nicht, Du wirst es nie zeigen, daß je mit den unaufhörlichen Einbiegungen desselben Maßes die untere Gerade geschnitten werde, es steckt in dieser *materia* ein ewig in sich zurückdrehender *circulus* — ein Labyrinth, das einen immer hineinlockt — wer sich hineinbegibt, verarmt, wie ein Schatzgräber, und bleibt unwissend. Solltest Du auf was immer für ein *absurdum* geraten, alles ist umsonst.

Du kannst es nicht als ein Axiom hinstellen; nehmen wir an: *es könnte ein Dreieck und ein Polygon von beliebiger Seitenzahl konstruiert werden, wenn die Parallelentheorie nicht wahr ist, sodaß die Summe aller ihrer Winkel kleiner als omne dabile sei*, und tausend derartige. Die *recta* wäre die einzige [Linie], die alle an ihr gezeichneten Senkrechten schneiden würde, es gäbe keine *recta* mehr, die alle diese schneiden würde, es wäre möglich, in den kleinsten Winkel den größten konvexen *angulum* mit seinen beiden *unendlichen* Schenkeln hineinzulegen."

„Könnte man für eine beliebige, was immer kleine *summa duorum internorum* zeigen, daß zwei *rectae* von den Endpunkten einer beliebig langen *recta* sich schneiden, nachher kann ich das übrige *cum rigore* [beweisen]; doch kann dergleichen nicht als Axiom angenommen werden. Jede Demonstration besteht aus vielen [Einzelheiten], manche sind auch einzeln genommen lang; einmal werde ich [Dir] alle mitteilen."

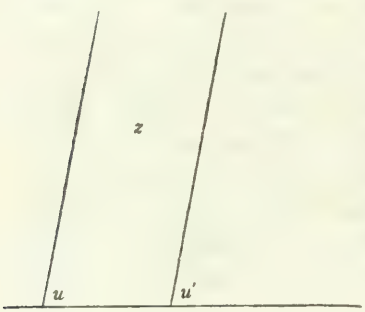


Fig 4

„Es gibt unter meinen Axiomen auch solche, die Dir im ersten Augenblick als richtig vorkommen würden, die es aber nicht sind, sie bilden keine durchaus einfache und hinreichend klare Grundlage für eine Wissenschaft wie die Geometrie. Mit der Größe kommt man hier nicht weit, weil hier *totum est aequale parti. Exempli gratia* $u = u'$ und kongruiert damit, wenn ich es daraufflege; so wie es hier [gezeichnet] ist, bleibt der Zwischenraum z übrig. — Darum kann ich auch dieses demonstrieren: falls die *Parallelentheorie* nicht wahr wäre, so nehme x bis zu 0 ab, AC (erstreckt in der Richtung nach C *in infinitum*) drehe sich um den Punkt A, bis sie AB erreicht; und wenngleich x' fortwährend dem x gleich sei, so kann der Punkt B für eine jede Stellung von AC so weit abstehen, daß, während AC die AB erreicht, BD (erstreckt nach D *in infinitum*) nirgends AC schneidet; und so gilt hier: *summa internorum fit omni dabili minor, decrescit ad 0.* — Während AC nach AB ankommt, so hat zwischen ihren Schenkeln das *planum infinitum*, dessen n-ten Teil ausgenommen, Raum, und n ist eine Zahl, die *omni dabili* größer ist; wenn man was immer für eine kleine, aber bestimmte *recta* angeben könnte, sodaß die Geraden von ihren beiden Enden sich schneiden würden, wenn nur die *summa internorum* um ein beliebig Kleines

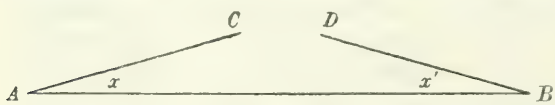


Fig. 5

kleiner als zwei Rechte sei, so hätte man gewonnenen Prozeß. Das alles ist noch nicht genug, und daß Du ja nicht versuchest, dies zu ergänzen, zu Ende zu führen, weiter zu gehen. Die Säulen des Herkules stehen in diesen Gegenden, gehe nicht um einen einzigen Schritt weiter, sonst bist Du verloren."

Diese „sehr nachdrückliche und kräftige Mahnung, die vielleicht geeignet schiene, selbst dem Kühnsten den Mut für immer zu benehmen" hatte bei Johann keinen Erfolg, „indem dadurch", wie er schreibt, „weit entfernt davon abgeschreckt zu werden, mein Interesse dafür nur um so lebhafter wurde, und meine Begierde und Energie, nach Möglichkeit um jeden Preis durchzudringen, auf das heftigste wuchs." Die Betrachtung jener Polygonallinie gab er freilich auf, dafür gelangte er aber noch im Jahre 1820 auf den Weg, der ihn schließlich zum Aufbau der absoluten Geometrie und zur Überzeugung von der Unbeweisbarkeit des XI. Axioms geführt hat.

„Der Weg, den ich dabei einschlug", schreibt Johann, „verdient wohl um so mehr eine nähere Anzeige, als der Gegenstand nicht für wichtig genug angesehen werden kann und überdies daraus erhellet, daß dieses der *einzige* Zugang zu der zu bezwingenden Festung sei. Ich sah ein, daß vom geradlinigen Dreieck noch viel weniger als hinsichtlich des elften Axioms irgend etwas mehr sich ergebe als Summe zweier Winkel $< 2R$, $\gtrless$ Seite $\gtrless$ Winkel zugleich, Summe zweier Seiten $>$ dritte, bemerkte aber dabei, daß bei einer unendlichen Verlängerung einer Seite, während eine andere Seite nebst dem von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkel beständig bleiben, das Dreieck einer konkreten räumlichen Grenzform zu strebe, worin denn doch wenigstens einmal mehrere *nähere Relationen* zwischen den vorhandenen 6 Stücken erkennbar sind. Denn es war gewiß, daß $bam + abn$ nicht $> 2R$ sei; der dritte Winkel ist *verschwunden*, und ich ahnte sogleich, daß, wenn man (bei $ac \rightsquigarrow \infty$) um c mit ca durch a Kreislinien gehen läßt, der wahre Durchschnittspunkt dieser mit bn einen konkreten Grenzpunkt δ auf bn habe und daß (oberflächlich gesprochen) $b\delta$ der Unterschied der beiden unendlichen Geraden am, bn oder streng ausgedrückt, die Grenze des Unterschiedes der beiden unendlich werdenden Seiten bc, ac sei. Auch erkannte ich sogleich, daß, wenn der Strahl $[ca] \rightsquigarrow \infty$, die Kreislinie eine räumliche Grenzlinie habe oder, wenn man das Wort in etwas weiterer Bedeutung nimmt, das Dasein einer Kreislinie eines unendlichen Strahls, welche

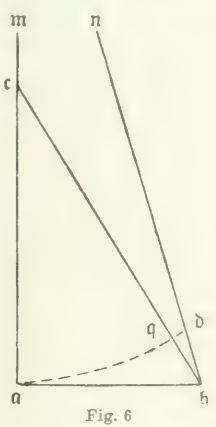


Fig. 6

gleichsam einen ähnlichen Bezug zu den Kreislinien von endlichen Strahlen und den mit einer geraden Linie gleichlaufenden Linien hat, wie die Parabel zu den Ellipsen und Hyperbeln. Und dies war allerdings schon *Etwas*, ging mir auch nimmer verloren; ich fühlte lebhaft, daß ich auf dem richtigen Wege sei."

Für die Entstehung dieser wichtigen und fruchtbaren Gedanken ist der schon erwähnte freundschaftliche Verkehr Johanns mit Karl Szász von erheblicher Bedeutung gewesen. Bei ihren Gesprächen über die Parallelentheorie, die „während der Sonn- und Feier-, überhaupt Ausgehtage" stattfanden, hatte Szász einmal „die sehr sinnreiche, echt geometrische und einer richtigen Entwicklung und Darstellungsweise der vom XI. Axiom unabhängigen Raumlehre zur Grundlage dienende Idee, daß, wenn die Gerade von einem Punkte b (Fig. 6, S. 79) durch einen Punkt c einer anderen Geraden am in der durch die beiden bestimmten Ebene um jenen Punkt b herumgedreht wird, dieselbe eine Zeit lang die andere Gerade am schneidend einmal, nach dem Ausdruck von Szász, **abspringe**, in welcher Lage er sie [bn] die nächste Parallele oder Nichtschneidende nannte". Johann nannte diese Gerade später asymptotische Parallele oder kurz *Asymptote*.

Ein anderes Mal stellte Szász die Frage, „ob daraus, daß bn (Fig. 6, S. 79) die Asymptote von am ist, nicht folge, daß am = bn sei", was Johann „ihm allerdings sofort verneinte". „Denn wenn ab auf am senkrecht steht, und man immer auf cb von c aus cq = ca abträgt, so wird der Punkt q, indem bc um b in die Lage bn gedreht wird, schließlich in einen Punkt δ übergehen, der, sobald abn kein rechter Winkel ist, von b verschieden ausfällt."

Weiter berichtet Johann, daß die beiden Freunde „den engen Zusammenhang der Beschaffenheit dieser Kreislinie von unendlichem Halbmesser mit der Frage nach der Wahrheit des XI. Axioms instinktiv ahnten und nicht daran zweifelten, daß sich das XI. Axiom wohl streng rechtfertigen ließe, sobald es anginge, die Geradheit der Kreislinie von unendlichem Radius darzutun", und daß sie sich „eine große Fertigkeit darin erwarben, die Unzulänglichkeit der diesfalls nicht genügenden Sätze zu erkennen." „Aber hierbei", so schließt Johann, „blieben wir auch vollends stehen."

Als Karl Szász Ende 1820 oder Anfang 1821 Wien verließ, gaben sich Johann und er „das kindische und eigentlich sinnlose Versprechen, daß, wenn in Zukunft nach der Trennung einer von ihnen in der Sache, deren Untersuchung sie zusammen angefangen hatten, zum Ziele komme, sie das Verdienst teilen wollten." „Dies bezog sich", fügt Johann hinzu, „aber nur auf den Beweis des XI. Axioms, denn nur danach strebten

wir und eine davon *unabhängige* Geometrie ist uns nicht im Traume eingefallen."

Wie schon berichtet wurde, hat sich Szász vom Jahre 1848 bis zu seinem Tode am 23. Oktober 1853 in Maros-Vásárhely aufgehalten; vorher hatte er eine Reise nach Deutschland gemacht und ist dabei auch in Göttingen bei Gauss gewesen. Zu dieser Zeit hat er es versucht, auf Grund jenes Versprechens einen Anteil an den Entdeckungen von Johann an sich zu reißen. Hiervon handelt ein Brief Johanns an seinen Vater vom 20. Jannuar 1855.

„Karl Szász, warum hat er sich der Herausgabe des *Deutschen* [*kurzen Grundrisses* vom Jahre 1851] widersetzt? Vielleicht wegen der Parallele zwischen Lobatschefskij und *Appendix*? Aber ich sehe mich herausgefordert durch seine Behauptung: »Dies haben wir zu zweit schon lange herausgebracht«, auch nach seinem Tode das zu wiederholen, was ich schon bei seinen Lebzeiten längst ausgesprochen habe: denn ich habe von ihm nichts gelernt; es ist zwar richtig, daß wir sprachen (eigentlich so, daß ich es zuerst gesagt habe), daß, wenn das XI. Axiom nicht wahr ist, so ist die Kreisgrenze oder, wenn es beliebt, der *circulus rad.* ∞ eine krumme gleichförmige Linie *in plano*, oder daß, wenn man deren Geradheit nachweisen könnte, das XI. Axiom bewiesen wäre. Aber all' dies haben wir nicht weiter diskutiert oder miteinander in die Details genommen und bewiesen und sind darüber auch nicht weiter hinausgegangen. Das geht auch daraus hervor, daß, nachdem ich dann alles für mich ausgearbeitet hatte, ich (wie ich damals sogleich schrieb), als er mit Prof. Tompa und einem Enyeder Studenten mich in Arad besuchte, *ihm als durchaus neue Sachen mit großem Eifer und Enthusiasmus*, eine ähnliche Aufnahme erwartend, *die Resultate* mitteilte, er jedoch vollständig unfähig war, deren *Wert* und *Wirkung* einzusehen; er bekräftigte nur immer: das ist ja keine Formel, ja fürwahr keine Formel, als offenbares Zeichen dafür, daß wir alles dieses nicht zusammen gemacht haben. Ferner, als ich *nach* dem Erscheinen des *Appendix* durch Enyed durchkam [Juni—Juli 1833, auf der Reise von Olmütz nach Maros-Vásárhely] und in Gegenwart von Dr. Váradi und Vajda (der also ein noch heute lebender Zeuge ist) Szász fragte, als die Rede auf den *Appendix* kam, ob er ihn denn gelesen hätte?, da antwortete er: Jawohl. Ich fragte: Ganz? Er antwortete: Jawohl, ganz: aber daß er auch nur den allerkleinsten Anteil daran gehabt hätte, davon war *altissimum silentium*, und dort wäre doch guter Platz gewesen, sein nunmehr niederträchtig und hinterrücks gestohlenes Anteilsrecht zu erwähnen. Und wenn er während seines hiesigen Aufenthaltes sich zu mir erniedrigt hätte, so wäre ich bereit gewesen, ihm vollständige

Aufklärung und Genugtuung zu geben, und ich weiß, daß der Weg der Gerechtigkeit dahin geht, offen zu verhandeln und beide Teile zu hören, nicht aber (ungehört) hinterrücks ein Autorrecht zu usurpieren. Als ob man darum, daß ich, setzen wir voraus, etwa mit G[auss] ein oder zweimal oder meinetwegen hundertmal gesprochen habe, behaupten könnte, wir haben die *Disqu. Arithm.* zusammen geschrieben. Und er hat auch bei G[auss] vergebens so etwas geplaudert, weil ein gescheiter Mensch derlei nicht glaubt ...“

Kehren wir jedoch zum Jahre 1820 zurück. Als Johann dem Vater von seinen neuen Untersuchungen berichtete, verhielt sich Wolfgang durchaus ablehnend. „Was die Kreislinie vom unendlichen Radius betrifft, die verwarf er gänzlich, indem er sagte, daß Euklid das Gesicht davon abwenden würde, und mir glauben machen wollte, daß jene einem Gauss und überhaupt jedem ganz gewiß anstößig vorkäme und entbehrlich sei.“

Wolfgang glaubte jetzt, seinen Sohn abermals vor den Gefahren der Parallelentheorie warnen zu müssen. „Ich gestehe, ich erwarte auch von dem Abspringen Deiner Geraden nichts. Es kommt mir vor, ich habe auch diese Gegenden betreten; ich bin bei allen Klippen dieses höllischen Toten Meeres vorbeigefahren und von überall kehrte ich mit zerschmettertem Mastbaum und zerfetzten Segeln zurück, und von da an datiere ich die Verderbnis meines Humors und meinen Fall. Unbesonnen setzte ich mein Leben und mein Glück hierauf — *aut Caesar aut nihil.* Wahrscheinlich hätte Newton selbst sein ganzes schätzbares Leben hiermit verschwendet. Ich betrachte dies als ein großes Unglück. Ich bedaure Dich. Ich sehe, mein unglückliches Leben wiederholt sich in Dir. Ich sehe Dich gleichsam zwischen gefahrvollen Klippen, wo noch ein Jeder Schiffbruch erlitt, im finstern Sturm hin und her geschleudert. Es ist ein unheimliches Schlachtfeld, worauf ich jeder Zeit geschlagen wurde; eine allem Streben des Forschergeistes trotzende, uneinnehmbare Felsenburg. In dieser Materie ist das ganze Leben nur eine brennende, ins Meer getauchte Fackel. Es ist eine wahre Krankheit, eine Art von Narrheit, eine tyrannische Idee. Es ist gleich wie des Zirkels Quadratur, das Suchen des Steins des Weisen, das Goldmachen, das Schatzgraben. Der Schatzgräber zerlumpt; je tiefer sein eigenes Grab wird, das er grub, um so mehr hofft er; es fehlt auch jederzeit nur mehr wenig, gleichwie bei einer unendlichen Reihe. Alles dieses — wie ich merke, auch die Parallelen bei besseren Köpfen — ist Krankheit. Bald zur Einsicht gelangend, daß Du hierin nichts getan habest, dürftest Du gleich mir für immer Deine Lust verlieren. Lerne an meinem Beispiel hierin und in Betreff anderer Dinge. Hättest Du

es wirklich herausgebracht, so würde ich mich freilich mehr darüber freuen, als über eine Herrschaft. Da ich dieses aber schlechterdings nicht glaube, so fürchte ich, Du verlierst Dein Alles auf eine Lotterie von einer Million gesetzt."

Johanns Bericht über seine Untersuchungen im Jahre 1820 wird bestätigt durch eine aus dieser Zeit stammende Aufzeichnung, das älteste Zeugnis von Johanns Beschäftigung mit der absoluten Geometrie. Er war im Herbst in die VI. Klasse gekommen, in der die Mechanik durchgenommen wurde. In einem Heft, das Lösungen von Aufgaben aus der elementaren Mechanik enthält, finden sich nun vier Figuren, mit der Überschrift: *A Parallelarum theoria; A* ist wohl der magyarische Artikel. Die Figuren 1, 2, 4 der an der Spitze dieses Buches befindlichen Nachbildung beziehen sich auf den Kreis von unendlichem Radius, die Figur 3 zeigt Dreiecke, bei denen die eine Seite Asymptote der beiden anderen ist.

Über die weiteren Fortschritte, die Johann während seines Aufenthalts auf der Ingenieur-Akademie gemacht hat, lassen sich aus den vorhandenen Aufzeichnungen nur Einzelheiten entnehmen. Jedenfalls waren seine Bemühungen dahin gerichtet, das XI. Axiom zu beweisen; als Mittel dazu sollten ihm ins Besondere die Beziehungen dienen, die bei Annahme der Unrichtigkeit dieses Axioms zwischen den 6 Stücken einen ebenen, geradlinigen Dreiecks bestehen. Jedoch ist er damals noch nicht durchgedrungen und hat nur gewisse vorbereitende Sätze aufstellen können. Je weiter Johann bei seinen Untersuchungen gelangte, um so weniger Anerkennung fand er bei seinem Vater, der dem Gedankenflug des genialen Sohnes nicht zu folgen vermochte, aber ihm doch an Erfahrung überlegen zu sein glaubte. Er sehe zwar aus einigen Sachen, schrieb Wolfgang damals dem Sohne, daß dieser tief eingedrungen sei und vielleicht gar auf den Grund seiner eigenen Tiefen, jedoch habe Johann erstens diesen Grund selbst noch nicht ganz erreicht und zweitens sei es vergebliche Mühe, wenn er es auch soweit bringen könne, weil es doch nicht ausreiche. „Setzte auch hinzu, daß ich die Parallelen, so wie wir es wünschten, nie finden werde. Auch als ich ihm ferner gar manche schöne und behufs Ergründung des Wesens des XI. Axioms höchst wichtige und unerläßliche Dinge, wie zum Beispiel den § 23 des *Appendix*, ohne Beweise eröffnete, fuhr er um so mehr in gleichem Tone fort, fing er an, mich ganz und gar nicht zu verstehen, ja sogar Zweifel in meine Worte zu setzen. Ich aber, ohne daß er mir irgend einen seiner Beweise mitgeteilt hätte, erklärte ihm, daß ich Kraft des von mir eingeschlagenen Weges im Stande sei, mittels eines beliebigen seiner Axiome das XI. Axiom darzutun. Er aber, statt den Wert davon zu erkennen und weit entfernt,

davon die Lösung des Knotens zu erwarten, erwiderte vielmehr, er halte bis jetzt noch seine Beweise für die vorzüglichsten, und fuhr fort, meine Mitteilungen mit Geringschätzung zu behandeln und selbe kaum oberflächlich anzusehen."

Die Beschwerden Johanns gegen den Vater füllen noch mehrere Seiten. Immer heftiger werden seine Angriffe, immer mehr schwillt sein Zorn an. Plötzlich bricht er ab mit den Worten: „Höre auf, sei gut!". Seien wir auch gut, indem wir diese Ausbrüche wilder Leidenschaft der Vergessenheit übergeben.

Wie schon hervorgehoben wurde, waren in der Zeit von 1820 bis 1823 die Bemühungen Johanns darauf gerichtet, das XI. Axiom zu beweisen. Einmal hat er auch geglaubt, das ersehnte Ziel erreicht zu haben. Getreu seinem Versprechen bat er den Vater, den vermeintlichen Beweis an Szász zu senden. Wolfgang tat das, fügte jedoch die Bemerkung hinzu, daß sich darin ein Fehler befinde, „denn mit so vielen Geometern des Erdballs", schreibt Johann, „hatte ich das Schicksal, aus Übereilung eine Lücke zu übersehen und somit zu fallen .... Ungeachtet aber auch dieser Beweis in Betreff des *damaligen* Zieles verunglückt ist, so ist mir dadurch und überhaupt bei keinen noch so unübersteiglich scheinenden Hindernissen nicht im geringsten der Mut gesunken. Am meisten niederschlagend hätten wohl allerdings die diesfälligen Äußerungen meines Vaters sein können, der sehr wohl und unter seinen Vorgängern am besten bekannt war mit den Schwierigkeiten des Gegenstandes und im Besitz von selbstgeschaffenen, weit durchdringenden, besseren Lehren .... Mich auch mit Senecas: *Suspice viros, etsi deciderint, magna conantes*, das heißt, berücksichtige Männer hohen Strebens auch in ihrem Falle, tröstend und neuen Mut schöpfend und mit um so mehr wachsender Begierde begann ich den Angriff von neuem, und so gelang es denn in der Tat nach einigen mit abwechselnden Wendungen fortgeführten Kämpfen und nach manchen teilweisen und widerwärtigen Siegen und Terrain-Okkupierungen endlich, im Jahre 1823, gänzlich durchzubrechen, dieses auf jede Weise uneinnehmbare Felsenschloß zu erstürmen und vollends einzunehmen und somit eine neue, bis dahin selbst dem Begriff nach noch nicht einmal geahnte Wissenschaft, und zwar Raumlehre, zu begründen."

XI. Kapitel

Die Entdeckung der absoluten Geometrie durch Johann BOLYAI

Zweiter Teil: Unbeweisbarkeit des XI. Axioms; der Appendix (1823—1832)

„Das Wesentlichste meiner Arbeit über die Raumlehre", erzählt Johann BOLYAI, „habe ich schon Ende des Jahres 1823 besessen, da ich im Winter, gerade um Mitternacht, durch das Wesen des § 29 des *Appendix* durchgedrungen bin, obwohl auf einem anderen Wege, der aber auch seine eigentümliche Schönheit hat". In diesem Paragraphen wird die Beziehung hergeleitet, die zwischen dem Lote y, das von einem Punkte auf eine Gerade gefällt ist, und dem Winkel u besteht, den die durch den Punkt gehende Asymptote zu der Geraden mit dem Lote bildet, eine Beziehung, die den Zugang zur absoluten Trigonometrie eröffnet und es ermöglicht, der euklidischen Geometrie das durchgeführte System einer vom XI. Axiom unabhängigen Geometrie an die Seite zu stellen.

Erfüllt von Freude über den nach langer, harter Arbeit errungenen Erfolg schreibt Johann am 3. November 1823 aus Temesvár an Wolfgang:

„Lieber, guter Vater! Ich habe über meine neuen Entdeckungen so übermäßig viel zu schreiben, daß ich mir gerade jetzt nicht anders zu helfen weiß, als daß ich mich auf nichts einlasse und bloß einen Quartbogen schreibe". Es folgen Mitteilungen, die hier nicht in Betracht kommen, aber am Ende des Briefes kommt Johann auf die Hauptsache zurück. „Mein Vorsatz steht schon fest, daß ich, sobald ich es geordnet, abgeschlossen habe und eine Gelegenheit kommt, ein Werk über die Parallelen herausgeben werde; in diesem Augenblick ist es [noch] *nicht* herausgefunden, aber der Weg, den ich gegangen bin, verspricht fast gewiß die Erreichung des Zieles, wenn diese überhaupt möglich ist; ich habe es noch nicht, aber ich habe so erhabene Dinge herausgebracht, daß ich selbst erstaunt war und es ewig schade wäre, wenn sie verloren gingen; wenn Sie, mein teurer Vater, es sehen werden, so werden Sie es erkennen; jetzt kann ich nichts weiter sagen, nur so viel: *daß ich aus Nichts eine neue, andere Welt geschaffen habe.* Alles, was ich bisher geschickt habe, ist ein Kartenhaus im Vergleich zu einem Turme. Ich

bin überzeugt, daß es mir nicht minder zur Ehre gereichen wird, als ob ich es entdeckt hätte."

Johanns damaligen Standpunkt hat Schlesinger treffend mit den Worten geschildert: „Er hatte aus der Annahme, daß das Parallelenaxiom nicht besteht, die Konsequenzen gezogen, diese bilden jene neue, andere Welt, von der er spricht, und er sucht nun in jenen Konsequenzen einen Widerspruch, zweifelt aber selbst schon daran, daß sich ein solcher herausstellen würde". „Wann Johann den entscheidenden Schritt vollzogen", fügt Schlesinger hinzu, „d. h. wann er zu der Überzeugung gekommen ist, daß das geometrische System, welches vom Parallelenaxiom unabhängig ist, in sich keinen Widerspruch enthält, läßt sich mit Sicherheit nicht feststellen, nur so viel ist sicher, daß dies vor dem Frühjahr 1825 geschehen ist."

Ehe wir jedoch auf diese entscheidende Wendung in Johanns Untersuchungen eingehen, muß darüber berichtet werden, wie sich Wolfgang zu der Entdeckung seines Sohnes stellte. Er äußerte zunächst den Wunsch, daß die Parallelentheorie seines Sohnes in sein *Tentamen* aufgenommen werde, an dem er schon seit 20 Jahren arbeitete und dessen Herausgabe er damals bald zu bewerkstelligen hoffte. „Er erteilte mir den Rat, daß, wenn es wirklich gelungen ist, sich mit der öffentlichen Bekanntmachung aus einem zweifachen Grunde zu beeilen sei, erstens weil die Ideen leicht in einen anderen übergehen, der es sodann herausgibt, zweitens aber liegt auch darin einige Wahrheit, daß manche Dinge gleichsam eine Epoche haben, wo sie dann an mehreren Orten aufgefunden werden, gleichwie im Frühjahr die Veilchen mehrwärts ans Licht hervorkommen, und da alles wissenschaftliche Streben nur ein großer Krieg ist, worauf ich nicht weiß, wann der Frieden folgen wird, so muß man, wenn man es vermag siegen, indem hier dem ersten der Vorrang zukommt."

Wolfgangs Ahnung war richtig. Gauss hat bereits vor 1819 die nichteuklidische Trigonometrie besessen; wir werden auf seine Gedanken über die Grundlagen der Geometrie bald zurückkommen. Ferner ließ Taurinus 1826 seine *Geometriae prima elementa* drucken, die beweisen, daß er die nichteuklidische Trigonometrie kannte und zu handhaben verstand. Endlich ist Lobatschefskij wohl schon im Jahre 1826 im Besitze dieser Trigonometrie gewesen und hat 1829 in seiner Abhandlung *Über die Anfangsgründe der Geometrie* sein System ausführlich entwickelt. Zu einer Vergleichung der Untersuchungen des russischen Forschers mit denen Johanns wird sich im XVI. Kapitel Gelegenheit finden, in dem kritische Bemerkungen Johanns über Lobatschefskijs *Geometrische Untersuchungen* (1840) wiedergegeben werden.

In seiner Antwort auf den Brief vom 3. November 1823 konnte Wolfgang sich freilich nicht enthalten, den Sohn zur Vorsicht zu ermahnen. Er erinnerte ihn daran, wie es KÄSTNER ergangen sei. Dieser erzählt in den *Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie*, die Wolfgang besaß und wohl schon in Göttingen kennen gelernt hatte, er habe lange Zeit geglaubt, die Schwierigkeit, die sich bei der Lehre von den Parallelen finde, sei durch HAUSENS *Elementa matheseos* [1734] völlig gehoben, bis ihm der vormalige Prediger bei der französischen Gemeinde in Leipzig COSTE diese Zufriedenheit benahm, indem er ihm anzeigte, daß HAUSEN einen Fehler gemacht habe. Endlich ließ Wolfgang es auch jetzt nicht an der Mahnung fehlen, sein einziger Sohn möge nicht wie er selbst ein vergebliches Opfer der Parallelen werden.

Als Johann im Februar 1825 seinen Vater in Maros-Vásárhely besuchte, brachte er eine Ausarbeitung der *absoluten Raumlehre* mit, die er diesem unterbreitete. Da er bei Wolfgang nicht Verständnis und Anerkennung fand, kam es zwischen Vater und Sohn zu einem Verwürfnis, das, durch andere Streitigkeiten verschärft, den beiden, die sich im Grunde eng zusammengehörig fühlten, viele Jahre des Lebens verbittert hat. „Er suchte den Wert auf alle erdenkliche Weise zu schmälern und deklamierte mit aller Ereiferung, deren er fähig war, dagegen, wovon ich die Ursche in dem Unvermögen suchte, das Wesen der Sache zu penetrieren. So sagte er zum Beispiel nach meinen Explikationen mit Geringschätzung, die aber auf ihn zurückfiel, daß dieses nur die Ausarbeitung des antieuklid'schen Systems sei. Gesetzt auch, es wäre nur das gewesen, so wäre es ihm nicht als eine Geringfügigkeit vorgekommen, wenn sein Verstand es heller aufgefaßt, sein Gemüt freier gewesen wäre. Auch behauptete er ganz verzweifelt, daß es nur zwei Systeme (denkbar *subjective successive*) gebe, nämlich entweder das Euklidische oder, wenn dieses nicht ist, ein anderes, worin die Größe des Parallelwinkels absolut bestimmt sei, und ließ sich diese Idee nicht aus dem Kopfe jagen und konnte es ungeachtet meiner auf das möglichst deutliche dargestellten Beweisgründe nicht einsehen, daß es doch unzählig viele hypothetische Systeme geben könne, zwischen welchen man das wahre auszuwählen nicht im Stande ist, indem man zum Beispiel bei ein und derselben Grundlinie ab [Fig. 7] und demselben inneren Winkel bam, bei $bn \parallel am$ [bn asymptotisch zu am] dem anderen inneren Winkel abn offenbar von Null an (ausschließlich) bis $2R - bam$ (einschließlich)

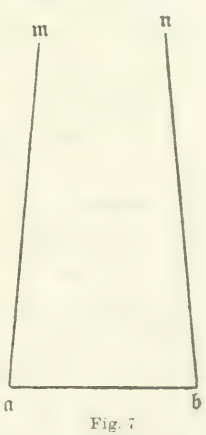


Fig. 7

jede beliebige Größe geben kann, wie es umständlicher in der [Raum-] Lehre selbst erklärt wird."

„Daß der Buchstabe *e* in den Ausdrücken häufig erscheint, überraschte ihn, und er fragte nach der Durchlesung, ob derselbe notwendig vorkomme. Ich bejahte es, gab ihm aber auch zu verstehen, daß in derlei Ausdrücken wie zum Beispiel $e^{\frac{x}{i}}$ der Buchstabe *e* insofern nicht wesentlich ist, als man dafür auch jede andere Länge setzen kann, wenn man nur statt *i* auch die entsprechende Länge wählt, und darauf fiel seine Freude über das Paradieren des *e* als eine Spielerei, und versetzte darauf: Ja, ja! Es dringt sich in dieser Lehre *e* nicht notwendig auf. Demnach hatte er von der hohen Wichtigkeit der darin durch *i* bezeichneten Länge keine entfernte Idee, hielt es nur für eine Willkürlichkeit."

Schlesinger hat „das Wesen der Sache", das Wolfgang nicht zu erfassen vermochte und das in der Tat eine Einsicht darstellt, die erst am Ende des neunzehnten Jahrhunderts volle Würdigung gefunden hat, folgendermaßen dargestellt.

„Die Geometrie ist eine aprioristische Wissenschaft, deren Aufgabe darin besteht, eine bestimmte Klasse von Erscheinungen der Raumwelt, wie sie sich uns durch die Anschauung darbieten, zu beschreiben. Das System der Geometrie, welches aus ganz abstrakten Begriffen aufzubauen ist, hat also als einzigen Prüfstein für seine Richtigkeit die Übereinstimmung seiner Ergebnisse mit der Anschauung. Diese Anschauung kann sich aber nur auf endliche Gebiete erstrecken, sie gibt also in Beziehung auf die im Euklidschen Postulate berührte Frage nur die Antwort, daß, sofern die beiden Geraden auf der dritten, sie schneidenden gemessen, einen endlichen Abstand zeigen, sie stets auf der Seite zusammentreffen, wo die Summe der beiden inneren Winkel kleiner als zwei Rechte ist, soweit wir das durch die Anschauung zu prüfen vermögen, d. h. solange diese Winkelsumme einen gewissen Wert nicht überschreitet. Welches dieser Wert ist, läßt sich durch die Anschauung — also *praktisch*, wie Johann sagt — nicht entscheiden, nur eine untere Grenze kann für diesen Wert und damit für den Wert des Bolyaischen *i* angegeben werden. Fügen wir gleich hinzu, daß auch noch die Möglichkeit, daß die beiden Geraden auch auf der anderen Seite der schneidenden Geraden zusammentreffen, offen bleibt, was auf die von Bolyai verworfene Annahme I. [Annahme eines endlichen Raumes], die einem imaginären Werte von *i* entspricht, hinauskommt."

„Das System der absoluten Geometrie enthält also eine *willkürliche Konstante i;* wählt man dieselbe im Bolyaischen Sinne positiv und

hinreichend groß im Verhältnis zu den der Anschauung zugänglichen Entfernungen oder im Sinne der erst später von RIEMANN ausgebildeten Annahme I. imaginär und dem absoluten Betrage nach hinreichend groß, so erhält man ein geometrisches System, welches mit der Anschauung in voller Übereinstimmung ist. Daß man auch heute noch vielfach nur dasjenige System für *anschaulich* hält, welches einem unendlich großen Werte von i entspricht — das Euklidsche —, ist nur eine Folge der Gewohnheit und Erziehung . . . ."

„Die Frage, ob das Euklidsche Postulat wahr ist oder falsch, ist demnach im Sinne BOLYAIS eine völlig müßige, es ist weder wahr noch falsch, sondern zum Aufbau der Geometrie einfach überflüssig. Das Euklidsche System, Σ wie BOLYAI es nennt, ist zur Beschreibung der Erscheinungen der Raumwelt ebenso geeignet wie irgend ein System S, wo i einen endlichen, wenn nur hinreichend großen Wert besitzt; das System Σ hat sich historisch wohl darum zuerst entwickelt, weil es in gewisser Hinsicht das einfachste ist. Dagegen aber ist das System S der absoluten Geometrie viel abwechselungsreicher und mannigfaltiger als das Euklidsche System Σ, es verhält sich zu diesem wie die Theorie der elliptischen Funktionen zu der der trigonometrischen, wie die Ellipse zum Kreis."

Wenn es auch, wie wir im IX. Kapitel sahen, nach dem Streit, den Wolfgang und Johann im Frühjahr 1825 wegen der Raumlehre gehabt hatten, bald zu einer Versöhnung gekommen war, so hielt der Frieden doch nicht lange an, denn die Gründe bestanden fort, die zu jenem Zwiespalt geführt hatten. Wolfgang hatte immer wieder Zweifel und Bedenken; es war gewiß gut gemeint, daß er mit den Ermahnungen nicht aufhörte, Johann solle seine Jugendkraft nicht an die Parallelentheorie verschwenden, sondern sich anderen mathematischen Untersuchungen zuwenden, bei denen er Großes leisten könne, allein Johann mußte die Sendung erfüllen, zu der er berufen war, und gehorchte der inneren Stimme.

Es möge genügen, aus den Briefen Wolfgangs an Johann, die den Jahren 1825 bis 1829 angehören, nur noch ein sehr bezeichnendes Stück mitzuteilen:

„Wäre es mir damals geglückt [die Parallelentheorie in Ordnung zu bringen], so wäre ich ein ganz anderer Mensch geworden, weder hätte ich zum zweiten Male geheiratet noch mich auf die Gärtnerei, auf die Dichtkunst noch auf die Hafnerei verlegt, meine verlorene Lust anderswo suchend; ich wäre moralisch besser geworden und wäre meinem Amte und meinem Haushalt anders vorgestanden. Ist man glücklich, so macht man andere leichter glücklich; was soll aus einer Quelle heraus-

fließen, die selbst trocken ist? Verliere keine Stunde damit. Keinen Lohn bringt es, und es vergiftet das ganze Leben. Selbst durch das Jahrhunderte dauernde Kopfzerbrechen von hundert großen Geometern ist es schlechterdings unmöglich, ohne ein neues Axiom [das elfte] zu erweisen. Ich glaube doch alle erdenklichen Ideen diesfalls erschöpft zu haben. Hätte Gauss auch fernerhin seine Zeit mit Grübeleien über dem XI. Axiom zugebracht, so wären seine Lehren von den Vielecken, seine *Theoria motus corporum coelestium* und alle seine sonstigen Arbeiten nicht zum Vorschein gekommen, und er ganz zurückgeblieben. Ich kann es schriftlich nachweisen [durch den Brief vom 25. November 1804], daß er seinen Kopf über die Parallelen zerbrach. Er äußerte mündlich und schriftlich, daß er fruchtlos darüber nachgedacht habe. Meine Ideen gefielen ihm überhaupt gar sehr und Er machte mich darauf aufmerksam, welch' hochwichtige Sache die Materie der Parallelen sei, obschon er davon [von der Göttingischen Parallelentheorie] doch keineswegs befriedigt war. In den Elementen der Arithmetik und Geometrie war Gauss (übrigens viele Turm-Etagen über mir erhaben) damals weniger fest als ich durch mich selbst, aber ihm waren die höheren Rechnungen bereits eine Spielerei, wo ich noch nicht einmal eine Idee davon hatte."

Es ist bemerkenswert, daß Wolfgang hier den Beweis des XI. Axioms als unmöglich bezeichnet; Johann hat uns überliefert, was er sich darunter gedacht hat. „Sein Beweis wider die Möglichkeit ist der, daß alles dem XI. Axiom Widersprechende sich im Unendlichen verbergen könne und daß, wo man zuerst von dem Gesetz des Schnittes (nämlich gerader Linien in einer Ebene) zu sprechen beginnt, dieses Gesetz beliebig angenommen durch das Vorvergangene nicht zerstört werden könne, da darin von dem Gesetze des Schnittes noch nichts enthalten ist, also daraus auch des Schnittes Gesetz nicht abgeleitet werden kann. Die Unwahrheit des XI. Axioms und was daraus folgt, vertrage sich mit allen sonstigen Sätzen der Geometrie. Wie nichtig und kraftlos dieses Räsonnement sei, bedarf wohl nicht erst eines Beweises. Mit gleichem Rechte ließe sich auch behaupten, es könne gar kein *neuer* Gegenstand zu klarer Erkenntnis kommen. Der wirkliche Beweis der Unmöglichkeit steckt wohl weit tiefer."

Johann verweist hier auf S. 490 des ersten Bandes des *Tentamen* (S. 97 des zweiten Teiles dieses Werkes). Über seinen eigenen Versuch, die Unmöglichkeit des Beweises des XI. Axioms darzutun, wird später berichtet werden.

Die Anerkennung, die ihm der Vater versagte, suchte Johann schließlich von andern zu erhalten. Schon im Jahre 1826 hatte er

seinem ehemaligen Lehrer Johann Wolter v. Eckwehr „einen schriftlichen Aufsatz zugesandt, worin bereits der Grund zum Ganzen gelegt wird und der sich wahrscheinlich noch in hochdessen Händen befindet"; alle Bemühungen, diesen Aufsatz wiederzufinden, sind leider vergeblich gewesen. Wie wir im IX. Kapitel gesehen haben, hat er später die Entscheidung von Gauss angerufen.

„Hochgeschätzter Gauss! Verzeihe, daß ich Dich in Deiner Riesenbahn störe; halte eine kleine Pause und schenk' eine Minute der Freundschaft", mit diesen Worten, denen man nachfühlt, daß sie dem Schreiber schwer geworden sind, hat Wolfgang Bolyai am 20. Juni 1831 nach fünfzehnjähriger Pause den Briefwechsel mit dem Jugendfreunde wieder eröffnet. Nachdem er kurz von seinen eigenen Schicksalen erzählt und über seinen Sohn Johann berichtet hat, fährt er fort: „Auf seine Bitte schicke ich dieses sein Werkchen zu Dir: habe die Güte, es mit Deinem scharfen, durchdringenden Auge zu beurteilen und Dein hohes Urteil ohne Schonung in Deiner Antwort, auf die ich sehnsuchtsvoll warte, zu schreiben." Auf dem Innern des Umschlages finden sich einige kurze Bemerkungen über den Inhalt des *Appendix*. „Dem Gauss gab ich eine kleine, klare Idee von Deiner Arbeit", schreibt Wolfgang am 17. September 1831 an Johann, „damit er nicht im voraus sich grause vor *der* Materie; aber es fiel mir nicht einmal ein, daß er das Werkchen nicht mit dem Brief zugleich erhalte. Im Spätherbst werde ich mein Werk sowohl Dir als dem Gauss schicken."

Der Brief Wolfgangs an Gauss war diesem durch Josef v. Zeyk zugestellt worden, das Werkchen aber nicht in seine Hände gelangt. „Dieses Werkchen", schreibt Wolfgang am 16. Januar 1832 an Gauss, „hatte ich zu gleicher Zeit mit dem ersten Briefe abgeschickt und wußte lange nicht, wo es in den fatalen Cholera-Umständen hingekommen sei. Nun schicke ich es durch Post unter Recepisse zum H. Josef von Zeyk, mit der Bitte, daß er einen Weg ausfindig mache, mein Werk, sobald es herauskommt, Dir kostenfrei einzuhändigen. . . . Mein Sohn schreibt aus Lemberg, daß er nachdem manches vereinfacht und eleganter gemacht und die Unmöglichkeit, a priori zu bestimmen, ob das Axiom XI wahr sei oder nicht, bewiesen habe. Verzeihe mir dieser Ungelegenheit wegen — mein Sohn hält mehr von Deinem Urteile als von ganz Europa — und harret allein darauf. — Ich bitte Dich innigst, mich bald von Deinem Urteil zu berichten, welchem gemäß ich ihm nach Lemberg schreiben soll."

Wie die zweite Sendung von Gauss aufgenommen wurde, darüber haben wir einen Bericht des Übergebers, Josef v. Zeyk, der im März 1832 seinen Eltern folgendes schrieb:

„Ich ersuche Sie, dem Wolfgang Bolyai zu sagen, daß, als ich im Leseverein von Gauss Abschied nahm und ihn fragte, ob er nicht etwas sagen ließe, er mir erwidert hat, daß er ihm vor nicht langer Zeit auf seinen Brief eine Antwort geschickt. Darauf haben wir uns verabschiedet. Er hat aber nachher plötzlich seine Zeitung bei Seite gelegt, mich wieder aufgesucht und mich gefragt, ob ich seinen (d. h. des Wolfgang Bolyai Sohn) persönlich kenne. Als ich mit «Ja» antwortete, sagte er: Der ist ein sehr ausgezeichneter Kopf, ja sehr ausgezeichnet; dann übergab er mir auch eine von seinen Arbeiten, welche ich dem Bolyai nach meiner Heimkehr übergeben werde. Ich weiß nicht, ob ich schon geschrieben habe, daß er, als ich ihm die Arbeit von Johann zuerst übergab und er den Titel las, lächelnd ein leises *Hm, hm!* hören ließ, als ob er sagen wollte: *magna petis, Phaëton.* Aber wie ich aus seiner jetzigen Ausdrucksweise ersehe, hat er sie doch richtig gefunden."

Die Antwort, die Gauss am 6. März 1832 seinem „alten, unvergeßlichen Freund" zugehen ließ, ist für Johanns ganzes weiteres Leben so wichtig geworden, daß die auf diesen bezüglichen Stellen hier ausführlich mitgeteilt werden müssen.

Nachdem Gauss den Empfang der beiden, ihm durch Herrn v. Zeyk zugestellten Briefe bestätigt hat, berichtet er über seine häuslichen Verhältnisse und fährt dann fort:

„Jetzt Einiges über die Arbeit Deines Sohnes. Wenn ich damit anfange, daß ich solche nicht loben darf, so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hieße mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen, zum Teile schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der Tat bin ich dadurch auf das Äußerste überrascht."

„Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenige Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mitteilte, mit besonderem Interesse aufnahmen. Um das zu können, muß man erst recht lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar. Dagegen war es meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, daß es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge."

„Sehr bin ich also überrascht, daß mir diese Bemühung nun erspart werden kann, und höchst erfreulich ist es mir, daß gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist."

„Sehr prägnant und abkürzend finde ich die Bezeichnungen: doch glaube ich, daß es gut sein wird, für manche Hauptbegriffe nicht bloß Zeichen oder Buchstaben, sondern bestimmte Namen festzusetzen, und ich habe bereits vor langer Zeit an Einige solcher Namen gedacht. So lange man die Sache nur in unmittelbarer Anschauung durchdenkt, braucht man keine Namen oder Zeichen, die werden erst nötig, wenn man sich mit andern verständigen will."

„So könnte z. B. die Fläche, die Dein Sohn F nennt, eine Parasphäre, die Linie L ein Paracykel genannt werden: es ist im Grunde Kugelfläche oder Kreislinie von unendlichem Radius. Hypercykel könnte der Complexus aller Punkte heißen, die von einer Geraden, mit der sie in einer Ebene liegen, gleiche Distanz haben; ebenso Hypersphäre. Doch das sind alles nur unbedeutende Nebensachen; die Hauptsache ist der Stoff, nicht die Form."

„In manchen Teilen der Untersuchung habe ich etwas andere Wege eingeschlagen; als Specimen füge ich einen rein geometrischen Beweis (in den Hauptzügen) von dem Lehrsatze bei, daß die Differenz der Summe der Winkel eines Dreiecks von 180° dem Flächeninhalte des Dreiecks proportional ist.". . .

„Ich habe hier bloß die Grundzüge des Beweises angeben wollen, ohne alle Feile oder Politur, die ich ihm zu geben jetzt keine Zeit habe. Es steht Dir frei, es Deinem Sohne mitzuteilen; jedenfalls bitte ich Dich, ihn herzlich von mir zu grüßen und ihm meine besondere Hochachtung zu versichern. Fordere ihn aber doch zugleich auf, sich mit der Aufgabe zu beschäftigen: Den Kubikinhalt des Tetraeders (von vier Ebenen begrenzten Raumes) zu bestimmen".

„Da der Flächeninhalt eines Dreiecks sich so einfach angeben läßt: so hätte man erwarten sollen, daß es auch für diesen Kubikinhalt einen eben so einfachen Ausdruck geben werde: aber diese Erwartung wird, wie es scheint, getäuscht."

„Um die Geometrie vom Anfang an ordentlich zu behandeln, ist es unerläßlich, die Möglichkeit eines Planums zu beweisen; die gewöhnliche Definition enthält zu viel und impliziert eigentlich *subreptive* schon ein Theorem. Man muß sich wundern, daß alle Schriftsteller von Euklid bis auf die neusten Zeiten so nachlässig dabei zu Werk gegangen sind; allein diese Schwierigkeit ist von durchaus verschiedener Natur mit der

Schwierigkeit zwischen Σ und S zu unterscheiden, und jene ist nicht gar schwer zu heben. Wahrscheinlich finde ich mich auch schon durch Dein Buch hierüber befriedigt."

„Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen Σ und S *a priori* zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, daß Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei *nur Form* unserer Anschauung. Einen anderen ebenso starken Grund habe ich in einem kleinem Aufsatze angedeutet, der in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1831 steht Stück 64, Pag. 625. Vielleicht wird es Dich nicht gereuen, wenn Du Dich bemühest, Dir diesen Band der G. G. A. zu verschaffen (was jeder Buchhändler in Wien oder Ofen leicht bewirken kann), da darin unter andern auch die Quintessenz meiner Ansicht von den imaginären Größen auf ein Paar Seiten dargelegt ist."

Was sich im Nachlaß von Gauss an Aufzeichnungen über die Grundlagen der Geometrie gefunden hat, ist im Jahre 1900 im VIII. Bande der Werke zusammengestellt worden, wobei auch die bezüglichen Stellen aus seinem Briefwechsel mit Wolfgang Bolyai, Olbers, Gerling, Wachter, Taurinus, Schumacher, Bessel, Encke und Struve hinzugefügt wurden. Wie im Falle der elliptischen Funktionen hat sich eine glänzende Bestätigung für die Richtigkeit der Behauptungen von Gauss ergeben, wenn es einer solchen Bestätigung überhaupt bedurft hätte. Einige der wichtigsten Stellen sollen hier angeführt, im übrigen aber auf den VIII. Band der Werke und die für den X. Band geplante wissenschaftliche Biographie von Gauss verwiesen werden.

Am 28. Juli 1797 hat Gauss in sein Tagebuch die Notiz eingetragen: *Plani possibilitatem demonstravi;* eine aus späterer Zeit, vielleicht sogar aus dem März 1832 stammende Aufzeichnung hierüber findet sich in einem Handbuche (Werke VIII, S. 194). Im Tagebuch folgt aus dem September 1799 die Bemerkung: *In principiis Geometriae egregios progressus fecimus;* nach welcher Richtung diese Untersuchungen gingen, zeigt der Brief an Bolyai vom 16. Dezember 1799, von dem schon im VI. Kapitel die Rede war. Es folgt dann eine Zeit, in der Gauss bemüht war, „einen Widerspruch, eine Inkonsequenz in der nichteuklidischen Geometrie zu entdecken"; dabei hatte er diese Geometrie so weit ausgebildet, daß er „alle Aufgaben vollständig auflösen konnte, sobald die Konstante $= C$ gegeben wird" (Brief an Gerling vom 16. März 1819, Werke VIII, S. 181). In dem Auftreten einer solchen Konstanten hatte er früher, nach einer Äußerung zu Schumacher aus dem Jahre 1808, eine Schwierigkeit gesehen (Werke VIII, S. 165). Wie ein Brief an Taurinus vom 8. November 1824 zeigt (Werke VIII, S. 187), ist er später zur Überzeugung von der Widerspruchslosigkeit der nichteukli-

dischen Geometrie gelangt. Er schreibt jetzt: „Die Annahme, daß die Summe der 3 Winkel [des Dreiecks] kleiner sei als 180^0, führt auf eine eigene, von der unsrigen (Euklidischen) ganz verschiedene Geometrie, die in sich selbst durchaus konsequent ist, und die ich für mich selbst ganz befriedigend ausgebildet habe, so daß ich jede Aufgabe in derselben auflösen kann mit Ausnahme der Bestimmung einer Konstante, die sich a priori nicht ausmitteln läßt. Je größer man diese Konstante nimmt, desto mehr nähert man sich der Euklidischen Geometrie und ein unendlich großer Wert macht beide zusammenfallen. Die Sätze jener Geometrie erscheinen zum Teil paradox und dem Ungeübten ungereimt; bei genauerer ruhiger Überlegung findet man aber, daß sie an sich nichts Unmögliches enthalten."

Endlich heißt es in einem Briefe an Schumacher vom 17. Mai 1831 (Werke VIII, S. 213): „Von meinen eigenen Meditationen [über die Parallelen], die zum Teil schon gegen 40 Jahre alt sind, wovon ich aber nie etwas aufgeschrieben habe, . . . habe ich vor einigen Wochen doch einiges aufzuschreiben angefangen. Ich wünschte doch, daß es nicht mit mir unterginge"; diese Aufzeichnungen (Werke VIII, S. 202 bis 209) lassen erkennen, daß ihm in der Tat Johann Bolyai „auf eine merkwürdige Art zuvorgekommen war".

Wolfgang ließ den Brief von Gauss durch seinen Schüler P. Szász aus Ilenczfalva abschreiben und sandte die Abschrift an Johann nach Lemberg; nach dem Poststempel hat sie dieser am 6. April 1832 erhalten. Später schenkte Wolfgang das Original dem Sohne, der ihm dafür eine von ihm selbst angefertigte Abschrift gab. Diese Abschrift kam 1856 an Sartorius v. Waltershausen, als Wolfgang die Briefe seines Jugendfreundes, „ausgenommen die bloß kommissionell nichts Interessantes enthalten", nach Göttingen sandte. Sie ist zuerst 1897 in den Göttinger Nachrichten abgedruckt worden. Das Original, das verloren gegangen zu sein schien, wurde 1905 von P. Szabó im Nachlaß seines Vaters S. Szabó aufgefunden, der 1858 bis 1868 Professor am ev. ref. Kollegium in Maros-Vásárhely gewesen war; gegenwärtig befindet es sich im Gauss-Archiv zu Göttingen.

Als Johann die Äußerungen von Gauss erfuhr, wollte er zuerst durchaus nicht glauben, daß dieser wirklich unabhängig von ihm und lange vor ihm ebenfalls zur nichteuklidischen Geometrie gelangt sei. Er berief sich dafür besonders auf die Worte aus Gaussens Briefe an Wolfgang vom 25. November 1804: *Ich habe zwar noch immer die Hoffnung, daß jene Klippen einst, und noch vor meinem Ende, eine Durchfahrt erlauben werden*, und kam sogar auf den häßlichen Verdacht, sein Vater habe die im *Appendix* niedergelegten Ideen an Gauss ver-

raten, und dieser wolle ihn nun der Priorität berauben. Aber auch nachdem er sich von der Grundlosigkeit dieser Unterstellung überzeugt hatte, war er mit dem Verhalten von Gauss ihm gegenüber keineswegs einverstanden, er sah darin vielmehr ein schweres Unrecht, das er Zeit seines Lebens nicht vergessen konnte, und obgleich er von Gauss stets als dem „kolossalen Geometer", dem „größten jetzt lebenden Mathematiker" spricht, so war sein innerstes Gefühl doch ein tötlicher Haß.

In Johanns Aufzeichnungen finden sich ausführliche Äußerungen über das Verhalten von Gauss. Es möge hier nur die folgende Stelle mitgeteilt werden.

„Nach meiner und, wie ich fest überzeugt bin, jedes Unbefangenen Ansicht, erscheinen alle von Gauss angeführten Gründe, warum er von seinen eigenen diesfälligen Arbeiten bei seinen Lebzeiten gar nichts habe wollen bekannt machen, kraftlos und nichtig zu sein, indem es ja in der Wissenschaft, wie im wirklichen Leben selbst, sich stets gerade darum handelt, notwendige und gemeinnützige, aber noch unklare Dinge gehörig aufzuklären und den noch fehlenden oder vielmehr schlummernden Sinn für Wahrheit und Recht zu wecken, gehörig zu stählen und zu fördern. Der Sinn für Mathematik überhaupt ist ja, zu sehr großem allgemeinen Schaden und Unheile, leider nur bei wenigen Menschen rege geworden; und aus einem solchen Grunde oder unter einem solchen Vorwande hätte Gauss konsequenter Weise wohl noch einen bedeutenden Teil seiner vortrefflichen Arbeiten für sich behalten müssen. Und der Umstand, daß es leider selbst unter den Mathematikern, und noch dazu unter berühmten derlei, noch viele oberflächliche gibt, kann ja doch für keinen Vernünftigen einen Grund abgeben, demnach fortan nur Oberflächliches und Mittelmäßiges zu leisten und die Wissenschaft lethargisch in dem ererbten Zustande zu belassen. Ein derlei Ansinnen könnte nur geradewegs widernatürlich und ein reiner Unsinn genannt werden; und demnach kann es nur um so unangenehmer auffallen, wenn Gauss auf den *Appendix* wie auch auf das ganze *Tentamen* statt seine gerade, biedere, freimütige Anerkennung des hohen Wertes und Äußerung seiner hohen Freude und Teilnahme darüber auszusprechen und statt nach der Kunst zu trachten, der guten Sache gebührenden Eingang zu verschaffen, dem vielmehr auszuweichen sich bemühet und sich beeilt, in fromme Wünsche und Leidwesens-Äußerungen über den Mangel an gehöriger Bildung sich zu ergießen. Darin besteht das Leben und Wirken und Verdienst wahrlich nicht!"

So viel Wahres und Beherzigenswertes in diesen Worten liegt, so wird man auch den Erwägungen Raum geben müssen, die Schlesinger

anstellt, wenn er sagt: „Vielleicht hat Gauss doch das Richtige getroffen, als er schwieg, gleichsam als wollte er in den ruhigen Entwicklungsgang der Geschichte nicht eingreifen: vielleicht hat seine Zurückhaltung, die wir, die den Wegen seines großen Geistes nicht zu folgen vermögen, unfaßlich finden, Johann davor bewahrt, von den Böotern als Narr und Ketzer verschrieen zu werden und ihm wenigstens den Frieden der Einsamkeit gesichert, wenn er auch, wie die meisten großen Bahnbrecher, bei Lebzeiten nicht die Früchte reifen sehen konnte, die aus den von ihm gepflanzten Samenkörnern emporwachsen sollten."

XII. Kapitel

Johann Bolyai in Domáld (1834—1846)

Am 15. Juni 1833 war Johann Bolyai von Olmütz nach Maros-Vásárhely abgereist. Dort lebte er zunächst bei seinem Vater, dessen zweite Frau kurz vorher, am 2. April 1833, gestorben war; Wolfgang hatte seinen Sohn aus zweiter Ehe, den siebenjährigen Gregor, bei sich. Das Verhältnis zwischen Wolfgang und Johann war schlecht und wurde bald unerträglich. „Der härteste Schlag aber, woran mein Herz brach", klagt Wolfgang am 20. April 1835 seinem Freunde Gauss, „ist der beinahe unglaubliche Undank meines Sohnes, für den ich soviel (manchmal zu viel) tat; seit vielen (aber vorzüglich in den nächsten) Jahren bin ich sein Märtyrer — am Ende war ich gezwungen seit einem Jahre, ihn aus dem väterlichen Zirkel zu verbannen .... Bei allen seinen Talenten ist er ein entsetzlich aufbrausender und rachsüchtiger Soldat und wegen nur geargtes Nichts anhaltend unversöhnlich, — also überall unverträglich .... Doch ist es möglich, daß er nach der gewaltigen Gärung sich setzen wird, aber bis dann erliege ich unter dem Grame."

Der Grund, warum Johann das Haus Wolfgang verlassen mußte, war, wie K. Szily erzählt, daß der Sohn sich schließlich soweit vergaß, daß er den Vater zum Zweikampf forderte. Sein Onkel Anton Bolyai brachte eine Versöhnung zustande; jedoch bestand Wolfgang darauf, daß Johann nicht mehr bei ihm wohne. Dieser lebte nun teils auf dem väterlichen Gute in Domáld, teils, getrennt vom Vater, in der Stadt Maros-Vásárhely. Vater und Sohn vermieden es, sich zu sehen. Sie blieben indessen in Verkehr miteinander durch einen eigenartigen Briefwechsel; die Mitteilungen, die sie einander zugehen ließen, tragen nämlich weder Überschrift noch Unterschrift. Sie beziehen sich hauptsächlich auf wissenschaftliche, im Besonderen mathematische Fragen; daneben handelt es sich auch um Geldangelegenheiten und die Verwaltung des Gutes in Domáld.

Trotz den Hindernissen, die in dem Mangel an wissenschaftlichen Hilfsmitteln und wissenschaftlichem Verkehr lagen, trotz seiner Kränklichkeit, die durch Anfälle von Wechselfieber noch verschlimmert wurde, hat Johann in den vier Jahren von 1833 bis 1837 eifrig daran gearbeitet, seine Untersuchungen aus der absoluten Raumlehre zu vervoll-

ständigen, weiterzuführen und zu einem umfassenden Lehrbuch der Raumlehre zu vereinigen, für das der *Appendix* nur das Vorspiel gewesen sein sollte. Freilich hat der Erfolg den Anstrengungen nicht entsprochen.

„Johann versprach dem Vater fortwährend, große Dinge auszuführen", schreibt Bedőházi, „doch blieb es immer beim Versprechen. Er arbeitete zwar viel, aber unbeständig, ließ das Angefangene im Stiche und arbeitete zugleich an mehreren Sachen. Sich Vorwürfe machend gesteht er ein, daß er sich schäme, mit seinem Vater häufiger zusammenzukommen, solange er nichts aufweisen könne. Gibt er aber einmal ein Lebenszeichen von sich, dann unterzieht er die eine oder die andere Meinung seines Vaters einer schonungslosen Kritik . . . . Wolfgang las Johanns Briefe vielleicht nicht mit der nötigen Aufmerksamkeit; »kaum durchgelesen warf er sie bei Seite und mißverstand auch die gediegensten Lehren«. Vielleicht berief er sich auch manchmal auf die »Autorität« [Gauss], und als er in den späteren Arbeiten seines Sohnes kein systematisches und selbständiges Ganze fand, das eines *Appendix* würdig gewesen wäre, bedachte er nicht, daß dieses kleine Werk ein wesentliches Ergebnis eines Menschenlebens bedeutet und man eine derartige Arbeit nicht jeden Augenblick schaffen kann. Vielleicht war er gegenüber dem Gerede anderer Leute über seinen Sohn zu leichtgläubig und vernahm er irgendein solches Geschwätz, das seine empfindliche Seele bald berührte, so hielt er seines Sohnes Versprechen, »er möge keine schlechte Meinung von ihm haben und nichts glauben, ohne sich überzeugt zu haben, er werde sehen, daß er [Johann] sich nicht umsonst gemüht habe«, bloß für eine leere Ausrede. Eines jedoch konnte Johann seinem Vater nicht absprechen, die Liebe . . . . Konnte Bitterkeit Wolfgangs Herz erfüllen, so hat sich doch darin der Haß niemals eingenistet. Und der Sohn? Es scheint, als ob auch sein Herz wahrer Reue und Zärtlichkeit fähig war. »Beim Verfassen meiner Lehre«, schreibt er in der Vorrede zu seiner *Raumlehre*, »schwebt hauptsächlich er mir vor den Augen und vor der Seele. Ich frage mich immer dabei, ob dieses Werk ihn zufrieden stellen werde, das ich ihm als Zeichen meines Dankes zu widmen wünsche, womit ich wenigstens einigermaßen sein Wohlwollen erlangen und ihm für das Ende unseres Lebens nach so viel Bitternis und Trauer einen Balsam bereiten könnte, der die Schmerzen stillt, das Gewölk zerteilt, den Himmel auf eine schöne und verjüngende Weise aufheitert und das gewesene große fatale *Minus* vernichtet und gut macht.«"

Johanns Tätigkeit an der Raumlehre wurde dadurch unterbrochen, daß sein Vater und er sich im Herbst 1837 an der Bewerbung um

einen Preis der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig beteiligten, der auf die Verbesserung der Lehre von der geometrischen Konstruktion der imaginären Größen gesetzt war. Von der Geschichte dieser Preisbewerbung wird das XIV. Kapitel handeln; hier sei nur bemerkt, daß weder Wolfgang noch Johann als Sieger hervorgingen.

Zu dem schmerzlichen Mißerfolg kam ein neuer Zwist Johanns mit seinem Vater, der durch die gleichzeitige Bewerbung um den Leipziger Preis veranlaßt war. Wie schwer die Mißstimmung Wolfgangs gegen seinen Sohn war, zeigt der Umstand, daß er am 17. April 1838 seinem Bruder Anton die Erledigung aller Angelegenheiten übertrug, die auf die Verwaltung des Gutes in Domáld Bezug hatten. Dorthin hatte Johann sich selbst verbannt; mehrere Jahre lang hat er Wolfgang nicht gesehen. Im Dezember 1842 schrieb dieser seinem Sohne einen Glückwunsch zum Geburtstag: „Dem Körper Gesundheit und der Seele solches Feuer zur Wissenschaft, daß ich noch einen *Appendix* erlebe, das ist es, was ich Dir wünsche . . . . Der Integral-Kalkül hat ein unbegrenztes Feld, auch die Riesen zweier Jahrhunderte schritten [nur] langsam vorwärts; dort könnte man es mit junger Kraft versuchen.“ Er schlägt ihm vor, er möge seine Ansicht über das Lagrangesche Restglied der Taylorschen Reihe äußern oder den einfachsten Beweis für die Darstellung der Primzahlen von der Form $4n+1$ als Summe zweier Quadrate erbringen sowie die Richtigkeit des folgenden Lehrsatzes zeigen: Wenn die Summe zweier Quadratzahlen durch eine andere Quadratzahl teilbar ist, so ist der Quotient entweder selbst eine Quadratzahl oder die Summe zweier Quadratzahlen. „Ich hatte das Problem nach einer Idee, die ich bei Euler fand, gelöst; es ist in den Petersburger Akten.“ Daß Johann sich früher eifrig mit der höheren Arithmetik beschäftigt hatte, geht aus dem Briefe Wolfgangs an Gauss vom 20. Juni 1831 hervor; dort heißt es: „Deine Polygonen-Theorie war mein Sohn willens, deutsch den kleineren Köpfen etwas zugänglicher herauszugeben, weil es ihn ärgert, daß es nicht so bekannt ist, wie er es wünschte; allein ich sagte ihm, daß ich von jemanden (weiß nicht, von wem) vernommen habe, daß Du es besonders herausgegeben hast; welches ich auch zu sehen sehr wünsche.“

Der Brief des Vaters veranlaßte Johann im Frühjahr 1843 nach Maros-Vásárhely zu kommen. Bald erneuerten sich jedoch die Streitigkeiten, und nach sechs Wochen kehrte er auf das Gut zurück, zurück zu dem unfruchtbaren, in körperlichen Genüssen aufgehenden Leben, in das er seit dem unglücklichen Jahre 1837 versunken war; die krankhafte Reizbarkeit, die er von seiner hysterischen Mutter ererbt hatte, gewann jetzt die Oberhand und zerstörte ihm Leib und Seele.

Im Jahre 1845 starb Anton Bolyai. In seinem Nachlaß fand Johann einen vertraulichen Brief seines Vaters vom 19. März 1838, in dem dieser sich aufs bitterste über seinen Sohn beklagte. Obwohl seitdem lange Jahre vergangen waren, geriet Johann in maßlosen Zorn, den er dem Vater gegenüber in schroffer Weise zum Ausdruck brachte. Dazu kam, daß Wolfgang nach dem Tode seines Bruders sich wieder um die Verwaltung des Gutes in Domáld bekümmerte. Es zeigte sich, daß Johann schlecht gewirtschaftet hatte; die Besitzung war verwahrlost, ein Stück des schönen Waldes war niedergehauen und das Holz verkauft worden. Wolfgang entzog jetzt dem Sohne die Erlaubnis, in Domáld zu wohnen, und verpachtete das Gut.

Im Jahre 1846 ist Johann nach Maros-Vásárhely zurückgekehrt, wo er ein Haus baute, für sich und Rosalie von Orbán, die Mutter seiner Kinder Dionys (Dénes), Julius (Gyula) und Amalie, mit der er seit dem August 1834 zusammenlebte. Er hatte eine Heirat beabsichtigt, war jedoch nicht in der Lage, die von der Militärbehörde geforderte Kaution aufzubringen; Wolfgang verweigerte die von ihm gewünschte Herausgabe seines väterlichen Erbteils und ließ sich auch durch Drohungen mit einem Prozeß nicht einschüchtern, teils weil er gegen die Heirat war, teils weil sein jüngerer Sohn Gregor dadurch benachteiligt worden wäre.

„Wenn er mit seiner Frau schlecht lebt, so liebt er doch die Kinder", hatte Wolfgang seinem Bruder Anton geschrieben. Seinem Sohne Dionys hat Johann den ersten Unterricht erteilt, in der Hoffnung, daß sich seine mathematische Begabung auf ihn vererbt habe. Allein die Freuden und die Schmerzen, die Wolfgang an dem genialen Sohne erlebt hatte, sind diesem versagt geblieben. Dionys Bolyai ist ein tüchtiger, ehrenwerter Beamter geworden: er lebt als pensionierter Gerichtshof-Kanzleidirektor in Karlsburg (Gyulafehérvár). Der zweite Sohn Julius Bolyai war Hutmacher in Klausenburg; er hat 1902 durch Selbstmord geendet.

XIII. Kapitel

Weitere Untersuchungen Johann Bolyais zur absoluten Geometrie

In dem *Grundriß der Geometrie*, der den Schluß des ersten Bandes des *Tentamens* bildet und erst im Laufe des Jahres 1832 gedruckt worden ist, sagt Wolfgang Bolyai: „Alle Systeme allgemein umfassend, die uns, wenn außer den übrigen Axiomen [abgesehen nämlich vom XI. Euklidischen Axiom] kein weiteres gesetzt wird, subjektiv möglich sind, das heißt, von denen nur eines gilt, ohne daß wir jedoch entscheiden können, welches absolut wahr ist, hat der Verfasser des Appendix den Gegenstand mit einzigartigem Scharfsinn angegriffen und eine für jeden Fall absolut wahre Geometrie aufgestellt; freilich hat er von der großen Masse nur das allernotwendigste in dem *Appendix* zu diesem Bande auseinandergesetzt und vieles der Kürze wegen weggelassen, wie die allgemeine Auflösung des Tetraeders und mehrere andere elegante Untersuchungen.“ Daß Johann über das im *Appendix* Gegebene hinausgegangen war, berichtet Wolfgang auch in dem Briefe an Gauss vom 20. April 1835: „Am Ende des zweiten Bandes ist, nebst der Erleuchtung mancher im ersten gegebenen Begriffe, auch eine gewisse Einigkeit beider Trigonometrien, nach dem Gedanke[n] meines Sohnes. Gerne hätte ich die Auflösung des *Tetraeders* drucken lassen, welche mein Sohn noch ein Jahr vor der Herausgabe seines *Appendix* fand: aber die Formeln, die ich sah, waren zu verwickelt, und ich weiß sie nicht. Und über alles hätte ich den Beweis davon drucken lassen, daß es absolut unmöglich sei dem menschlichen Auge, es einzusehen, ob das XI. Axiom wahr sei oder nicht: mein Sohn behauptet den *evidenten* Beweis davon zu haben.“

Aus diesen Äußerungen geht hervor, daß Johann Bolyai sich in der Zeit von 1831—1835 mit der Beantwortung der folgenden drei Fragen beschäftigt hat:

1. In welchem Zusammenhange steht die absolute Trigonometrie mit der sphärischen Trigonometrie?

2. Welches Volumen hat in der absoluten Geometrie ein von vier Ebenen begrenztes Raumstück?

3. Läßt es sich entscheiden, welches der subjektiv möglichen Systeme der absoluten Geometrie in Wirklichkeit gilt?

Von den Niederschriften, die Johann hierüber in der Zeit zwischen 1830 und 1835 gemacht hat, haben sich leider nur wenige Blätter finden lassen. Eine wertvolle Ergänzung bilden daher die Aufzeichnungen Johanns aus den letzten Jahren seines Lebens (1851—1858). Über diese Aufzeichnungen wird in den Kapiteln XVI—XIX berichtet werden, es erscheint jedoch angebracht, hier die Stücke, die sich auf die drei angegebenen Fragen beziehen, vorwegzunehmen.

In den Nachträgen, die Wolfgang Bolyai dem zweiten, erst im Jahre 1834 erschienenen Bande des *Tentamen* hinzugefügt hat, findet sich auch ein von ihm selbst verfaßter Zusatz zum *Appendix* des ersten Bandes:

„Endlich sei es erlaubt, dem *Tentamen* etwas hinzuzufügen, *was Eigentum des Verfassers des Appendix ist:* der freilich verzeihen möge, wenn ich etwas nicht mit seinem Scharfsinn in Angriff genommen habe."

„Die Sache besteht kurz gesagt in Folgendem: *die Formeln der sphärischen Trigonometrie*, die in dem genannten *Appendix* unabhängig vom XI. Euklidischen Axiom bewiesen werden, *stimmen überein mit den Formeln der ebenen Trigonometrie, wenn* (auf eine so gleich zu nennende Art) *die Seiten des sphärischen Dreiecks als reell, die des geradlinigen aber als imaginär angesehen werden;* sodaß die Ebene in Beziehung auf die trigonometrischen Formeln als eine imaginäre Kugel betrachtet werden kann, wenn als reelle Kugel diejenige angenommen wird, in der sin R = 1 ist."

In Einklang hiermit stehen Aufzeichnungen Johanns, die noch aus der Zeit vor dem Erscheinen des zweiten Bandes des *Tentamen* stammen. Hierin berichtet dieser, daß er seinen Vater „nach vollendetem Drucke (des *Appendix*) schriftlich aus Lemberg darauf aufmerksam gemacht [habe], daß, wenn man sämtliche Seiten des geradlinigen Dreiecks, auf i als Einheit der Länge bezogen, als ebenso große imaginäre Größen ansieht, alle Relationen in geradlinigen Dreiecken denen in Kugeldreiecken vollkommen analog seien, z. B. in einem rechtwinkligen Dreieck, worin a, b Katheten, c Hypotenuse ist, wenn das Dreieck sphärisch ist:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b,$$

und also, wenn es geradlinig ist [mit $+ = \sqrt{-1}$]:

$$\cos + c = \cos + a \cdot \cos + b.$$

Und so werden die beiden Trigonometrien höchst einfach in eine zusammengezogen. Und ich bedauere es doch, es nicht wenigstens angezeigt zu haben, da es jeder sogleich bemerken muß. Es war mir auch, seit ich diese Formeln zuerst fand, keineswegs entgangen, allein damals nur vorzüglich die Materie der Parallelen als Hauptsache im Auge haltend und die allgemeine Unvollkommenheit und Unbegreiflichkeit der Lehre

von den imaginären Größen erwägend, konnte ich mich — ungeachtet des Versuches, diese Idee nicht fallen zu lassen, — nicht entschließen, eine so unvollkommene Lehre, als die imaginäre bis dahin war, aufzunehmen, und, da die damals durch die Umstände gebotene Kürze nicht erlaubte, sich darauf einzulassen, so beschloß ich, obschon sehr ungern, es auf eine andere Gelegenheit aufzusparen."

Eine solche Gelegenheit bot sich im Jahre 1837, als Johann, durch eine von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig gestellte Preisaufgabe veranlaßt, seine „im Wesentlichen im Jahre 1831 ausgedachte" Theorie der imaginären Größen ausarbeitete. Über diese Preisbewerbung wird im XIV. Kapitel berichtet werden.

In § 9 dieser *Responsio* heißt es:

„In dem Anhange des ersten Bandes des Werkes mit dem Titel: *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi* {*das im Jahre 1832 zu Maros-V. erschienen ist*} werden die Formeln der ebenen Trigonometrie für den Fall entwickelt, daß der Satz, den Euklid (nach dem Urteil aller scharfsinnigeren Geometer) mit Unrecht unter der Form des XI. *Axioms* vorgebracht hat, *falsch* wäre (nachdem die Raumlehre unabhängig von dem genannten Axiom begründet worden ist). Aus diesen Formeln folgt nun leicht, daß die Gleichungen gelten

$$\sin \dotplus \frac{a}{i} = \sin \alpha \cdot \sin \dotplus \frac{c}{i},$$

$$\sin \dotplus \frac{c}{i} = \cos \dotplus \frac{a}{i} \cdot \cos \dotplus \frac{b}{i},$$

in denen a, b, c die Katheten und die Hypotenuse bezeichnen, α den der Kathete a gegenüberliegenden Winkel und endlich i eine gewisse ebendaselbst erklärte Strecke (die an und für sich bei der gegenwärtigen Annahme bestimmt ist). Aus diesen *beiden* Gleichungen fließen bereits sämtliche übrigen Formeln der ebenen Trigonometrie."

„Die Betrachtung dieser Gleichungen läßt aber erkennen, daß die ebenen rechtwinkligen Dreiecke und mithin die ganze Ebene und die von ihr gleichweit abstehenden Flächen (die ich, ebenfalls zu derselben Lehre gelangend, vor vielen Jahren *hypersphärisch* genannt habe) durchaus auf ganz ähnliche Art wie die Kugelfläche bei der Rechnung behandelt werden können, und zwar so, daß, wenn man jene Größe r, durch die die Seiten eines auf irgend einer überall gleichförmigen Fläche befindlichen rechtwinkligen Dreiecks zu dividieren sind, damit

$$\cos \frac{c}{r} = \cos \frac{a}{r} \cdot \cos \frac{b}{r}$$

gesetzt werden darf, z. B. als *Parameter* dieser Fläche bezeichnet, die Parameter der sphärischen Flächen *reell*, die Parameter der von einer Ebene gleich weit abstehenden Flächen *imaginär* (d. h. *wirklich existierende, mit den Zeichen* $\dot{+}$, $\multimap$ *behaftete Größen*) werden und daß der Parameter der Ebene $\multimap i$ (und ebenso $\dot{+} i$) wird."

„Allein diese Tatsache läßt sich auch anders auffassen. Man könnte {nämlich, *freilich weniger natürlich, passend, richtig, einfach, elegant*} auch die Ebene als zu dem Parameter i gehörig ansehen und die *geradlinigen Strecken*, die in der Ebene an die Stelle der größten Kreise treten, als *imaginäre Bogen* in bezug auf den Parameter i betrachten; allein auf diese Art entsprechen (wie sich zeigen läßt) den Parametern, die *kleiner* als i sind, keine solchen gleichförmigen Flächen, deren Bogen, zu dem soeben erklärten Zwecke, für imaginär gehalten werden könnten."

Auf einem Zettel, der dem Entwurfe der *Responsio* beigelegt ist, findet sich eine ausführlichere Fassung des § 9, die, ebenfalls in deutscher Übersetzung, hier wiedergegeben werden soll.

„Es darf jedoch die folgende, sehr interessante Bemerkung um so weniger mit Stillschweigen übergangen werden, als sie höchst elegant ist,eine ausgezeichnete Anwendung der (sogenannten) imaginären Größen gibt, und es ermöglicht, die ganze vom XI. Axiom unabhängige Raumlehre höchst einfach und bequem darzustellen. Die höchst wirkliche Wissenschaft der Wahrheit darf [nämlich] nicht durch die Betrachtung nicht existierender Dinge befleckt werden. Welchen Sinn hat $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$, wenn $\sqrt{-1}$ keinen hat? Alles wird sonnenklar, wenn man sorgfältig beachtet, daß die einer Größe vorgesetzten Zeichen $+$, $-$, $\dot{+}$, $\multimap$ gar nichts anderes bedeuten, als die *Art und Weise, wie die absoluten Größen in der algebraischen Rechnung behandelt werden sollen*, nach einer Verabredung, die man zu treffen hat.

„Schreibt man der Kürze und Einfachheit wegen $\dot{+}$ für $+\sqrt{-1}$, $\multimap$ für $-\sqrt{-1}$, sodaß $\overset{\dot{+}}{\circ}1\cdot\overset{\dot{+}}{\circ}1=-1$ und $\overset{\dot{+}}{\circ}1\cdot\overset{\circ}{\dot{+}}1=+1$ wird, und wählt i, gemäß § III, als *Einheit*, so überzeugt man sich leicht durch Vergleichung mit den bekannten eleganten Formeln in § 31,I [des *Appendix*], daß

$$1 : \sin\alpha = \sin\dot{+}c : \sin\dot{+}a$$

ist, oder, wenn man zu noch größerer Vereinfachung nicht die positiv, sondern die mit dem Zeichen $\dot{+}$ genommenen Seiten mit a, b, c bezeichnet oder bloß c, a statt $\dot{+}c$, $\dot{+}a$ schreibt:

$$1 : \sin\alpha = \sin c : \sin a,$$

und ebenso ergibt sich aus II:

$$\cos\alpha : \sin\beta = \cos a,$$

aus III:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \text{ und } \cot\alpha \cdot \cot\beta = \cos c,$$

aus § 30:

$$\operatorname{tg} z = \multimap \sin \dotplus y \text{ und } \dotplus \bigcirc y = 2\pi \sin \dotplus y,$$

oder wenn man festsetzt, daß ein für alle Male bei jeder Rechnung jede Gerade in der Ebene mit dem Zeichen $\dotplus$ genommen werden soll, wobei bloß y für $\dotplus y$ und bloß $\bigcirc y$ für $\dotplus \bigcirc y$ (indem das ganze Zeichen $\bigcirc y$ eine Linie bezeichnet) geschrieben werden darf, ist einfach:

$$\operatorname{tg} z = \multimap \sin y, \qquad \bigcirc y = 2\pi \sin y;$$

ferner folgt sogleich aus § 32, III:

$$\frac{r}{p} = \cos q, \qquad s = p \cdot \sin q,$$

aus IV:

$$\odot x = 2\pi \cos x - 2\pi = -2\pi \operatorname{sin\,vers} x$$

u. s. w.“

„Die größte Ähnlichkeit oder vielmehr die vollständige Übereinstimmung der Ausdrücke für die Größen derselben Art auf der Kugelfläche in Σ springt in die Augen. Denkt man sich eine Kugel des L-förmigen Halbmessers $r = i = 1$ (deren *gerader* Halbmesser nach § 30 gleich log nat $(1 + \sqrt{2})$ ist), so ist ihre Oberfläche [und ihr] größter Kreis gleich denen der Kugel vom Halbmesser 1 in Σ, und alle vorher erhaltenen Ausdrücke stimmen vollständig überein mit den Ausdrücken für dieselben Größen auf dieser Fläche.“

„Es läßt sich allgemein beweisen, daß, wenn in irgend einer überall gleichmäßigen Fläche — eine solche kann, abgesehen von F, nur sphärisch, eben oder einer Ebene parallel [äquidistant] sein — jede kürzeste Linie a (oder Schnittlinie mit einer durch eine Achse gehende Ebene), wenn die Fläche sphärisch ist, durch diejenige Zahl, die den entsprechenden Bogen in dem Winkel bei dem Mittelpunkte von a ausdrückt, wenn aber die Fläche eben oder einer Ebene parallel [äquidistant] ist, durch die Maßzahl des Stückes einer Geraden ausgedrückt wird, die in dem ersten Falle in derselben Ebene, sonst in der parallelen [äquidistanten] Ebene p liegt, sodaß das Stück zwischen die Fußpunkte der Lote [von den Endpunkten von a] auf p fällt, und wenn in dem früheren Falle alle Linien in derselben Fläche mit dem Zeichen $+$, in dem späteren aber mit dem Zeichen $\dotplus$ genommen werden, so kann die Theorie aller dieser Flächen ganz allgemein von denselben Formeln umfaßt werden und es können von ihnen allen ganz entsprechende Lehrsätze gelten. So darf man z. B., wenn die Formeln der sphärischen Trigonometrie bekannt sind,

aus ihnen ohne jede weitere Untersuchung schließen, daß auch für geradlinige rechtwinklige Dreiecke die Formeln gelten:

$$\cot\alpha = \cot a \cdot \sin b, \qquad \cot c = \cot a \cdot \cos\beta \text{ usw.},$$

und in gleicher Weise kann man umgekehrt aus allen Eigenschaften der Ebene, in dem angegebenen Sinne, sogleich auf Eigenschaften der Kugel schließen."

„Hier möge es genügen, nur einige besonders wichtige Eigenschaften zu streifen, um zu zeigen, in welcher Weise diese *Übertragung* zu geschehen hat und wie man mit ihrer Hilfe die Raumlehre, ohne zu wissen, ob das System Σ oder S wirklich existiere, aufs bequemste analytisch behandeln kann."

„*Erstens* möge bemerkt werden, daß der Kürze wegen (um die Schaffung eines neuen Wortes zu vermeiden) die Bezeichnungen *Kugel* (und *Kreis*) in einem erweiterten Sinne verstanden werden sollen, sodaß einem jeden überall gleichförmigen Fläche (und Linie) dieser Name beigelegt werde. Im erweiterten Sinne oder analytisch heißt *Strahl* [Radius] jeder überall gleichförmigen Fläche oder gleichförmigen Linie in der Ebene eine algebraischen Größe, die augenscheinlich ganz und gar nicht der Euklidische Strahl ist, sondern die aus den soeben gefundenen Ausdrücken auf eine sogleich darzulegende Art hervorgeht, Strahl einer gleichförmigen Linie auf der Kugel aber ein Stück einer gleichförmigen, die Kugel in zwei kongruente Teile teilenden Linie, das die Krümmung mißt. Jeder Kreis hat unendlich viele Strahlen, während nur ein einziger oder gar kein Euklidischer Strahl vorhanden ist, ihr Ausdruck ist:

$$y \overset{\circ}{-} 2n\pi,$$

wo n eine ganz beliebige ganze Zahl bezeichnet, mit dem Zeichen $\overset{\circ}{-}$ oder —. Auch ist

$$\bigcirc(y \overset{\circ}{-} 2n\pi) = \bigcirc y,$$

wo das Zeichen $\overset{\circ}{-}$ für die Ebene und die ihr parallelen Flächen zu nehmen ist, das Zeichen — aber für eine sich schließende Kugel gilt."

Die Fortsetzung dieses Manuskriptes hat sich leider nicht finden lassen, als Ergänzung können jedoch einige Randbemerkungen dienen, welche Johann der im IX. Kapitel erwähnten, in deutscher Sprache abgefaßten Ausarbeitung der ersten 33 Paragraphen des *Appendix* beigefügt hat, die er im August 1832 dem Erzherzog Johann überreichte. Wie es scheint, hat Johann Bolyai diese Randbemerkungen im Jahre 1837 niedergeschrieben.

Zu § 30 des Appendix wird bemerkt:
„[Es ist]

$$\bigcirc y = 4\pi i \frac{e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}}{2} = \dotplus\, 4\pi i \sin \dot{-}\, \frac{y}{i} = \dot{-}\, 4\pi i \sin \dotplus\, \frac{y}{i}.$$

Hierbei bedeutet, wie auch in der Schrift über die imaginären Größen vom Jahre 1837, abweichend von der üblichen Bezeichnung 4π den Umfang des Euklidischen Kreises vom Halbmesser 1.

„Auf einer Kugel, deren Strahl die senkrechte Ordinate (Höhe) eines der i gleichen *paracyklischen* Bogens ist, ist aber der $\bigcirc$ eines y gleichen *cyklischen* Strahles

$$= 4\pi i \sin \frac{y}{i}.$$

Auf einer zur Ebene parallelen Hypersphäre aber ist

$$\bigcirc y = n \bigcirc \left(\frac{y}{n}\right) \text{(in Ebene)} = \dot{-}\, 4\pi i n \sin \dotplus\, \frac{y}{ni} = \dot{-}\, 4\pi i' \sin \dotplus\, \frac{y}{i'},$$

wenn $ni = i'$ gesetzt wird (nämlich i' jene hypercyklische Länge ist, auf derselben Hypersphäre, deren $I' = e$ ist). Und ebenso wird auf einer Kugel, deren Strahl die senkrechte Ordinate eines paracyklischen Bogens $= i''$ ist, allgemein

$$\bigcirc y = 4\pi i'' \sin \frac{y}{i''},$$

woraus der Ausdruck auf einer Hypersphäre sogleich erhalten wird, sobald man nur sowohl dem Strahle als auch dem Kreise $\dotplus$ (oder beiden $\dot{-}$) vorsetzt. Und um den Ausdruck auf der Parasphäre abzuleiten, darf man nur $(i' \backsim \infty)$ die Grenze nehmen von $i' \sin \frac{y}{i'}$, da diese gleich y ist, also auf diese Art den wahren Ausdruck von $\bigcirc y$ auf der Parasphäre wirklich darbietet. Es kann hierbei i' der Hauptstrahl der Kugel (von L, $= \infty$) heißen und $\underset{\dot{-}}{\dotplus}\, i'$ jener der Hypersphäre heißen . . ."

„Man kann auch eine allgemein auf alle (auch auf die sich nicht schließenden) gleichförmigen Linien auf beliebigen gleichförmigen Flächen anwendbare Definition von Strahl oder, wenn man will, *Parameter* auf derselben Fläche geben. Denn der gerade Strahl des senkrechten Entwurfes jener Linien auf der mit der Fläche parallelen Ebene ist vorher definiert, und offenbar ist das Produkt der geraden Strahlen beider Linien der zu definierende Strahl der fraglichen Linie *auf* der Fläche."

Im Jahre 1851 hat Johann eine neue Darstellung dieser Gedanken ausgearbeitet. Sie bildet einen Abschnitt einer Kritik der *Geometrischen Untersuchungen* von N. Lobatschefskij, über die in dem XV. und XVI. Kapitel berichtet werden wird. Bei Lobatschefskij er-

scheint nämlich der Zusammenhang zwischen der sphärischen und der „imaginären" Geometrie lediglich als eine analytische Tatsache. Dieser formalistischen Auffassung gegenüber wollte Johann den höheren, geometrischen Gesichtspunkt zur Geltung bringen. In dieser Beziehung war er weit über LOBATSCHEFSKIJ hinausgegangen und hatte sich zu einer Höhe erhoben, die erst am Ende des neunzehnten Jahrhunderts wieder erreicht worden ist. Er hatte gezeigt, daß es in jedem Systeme S mit einem bestimmten i Flächen gibt, die ohne Formänderung nach jeder Richtung hin in sich verschiebbar (*undique uniformes*) sind und zwar erstens Flächen, auf denen für einen beliebigen Radius die sphärische Trigonometrie gilt, zweitens solche, auf denen die Euklidische Geometrie der Ebene verwirklicht ist, und drittens solche, auf denen die absolute Geometrie der Ebene für beliebiges i gilt; andere überall gleichmäßige Flächen gibt es nicht. Mit Benutzung des von GAUSS (*Disquisitiones circa superficies curvas*. 1828) eingeführten Begriffes des Krümmungsmaßes — der, wie es scheint, Johann unbekannt geblieben ist — läßt sich diese Tatsache so ausdrücken, daß es in jedem Systeme S, jedoch nicht in Σ, ohne Formänderung in sich verschiebbare Flächen gibt, deren Krümmungsmaß irgend einen beliebigen, zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden *konstanten* Wert besitzt. Es möge noch ausdrücklich bemerkt werden, daß Johann den von BELTRAMI 1869 entdeckten Zusammenhang zwischen der absoluten Geometrie der Ebene für ein beliebiges i und den Flächen von konstantem negativem Krümmungsmaße, die im Euklidischen Raume Σ liegen, nicht gekannt hat.

Wir kommen zu Johann BOLYAIS Untersuchungen über die Kubierung des Tetraeders, die mit dem Jahre 1831 beginnen. Die uns erhaltenen Aufzeichnungen über diesen Gegenstand stammen — mit einer Ausnahme — aus der Zeit um 1856. Ihre Entzifferung wurde dadurch erheblich erschwert, daß Johann sich einer großen Anzahl von Abkürzungen und neuen Bezeichnungen bedient, deren Bedeutung erst mühsam ermittelt werden mußte. Da diese Neuerungen nicht nachahmenswert erscheinen, ist der Text in die übliche Formelsprache übertragen worden.

Johann hatte zwar seinem Vater versichert, daß er die *allgemeine* Auflösung des Tetraeders gefunden habe, in seinen Aufzeichnungen beschränkt er sich jedoch auf eine besondere Art von Tetraedern, die entstehen, wenn in dem Eckpunkte c eines in b rechtwinkligen Dreiecks abc auf dessen Ebene eine Senkrechte cd errichtet wird, ohne daß er angibt, wie man daraus die allgemeine Kubierung der Tetraeder gewinnen könne. Es verdient bemerkt zu werden, daß Tetraeder dieser besonderen Art auch bei LOBATSCHEFSKIJ und GAUSS auftreten.

Erste Methode

Zerlegung mittels Ebenen, die auf ab *senkrecht stehen*

Auf einem halben Foliobogen, dessen Rückseite den Entwurf einer militärischen Meldung, datiert Lemberg, den 5. Mai 1832, enthält, findet sich folgende augenscheinlich aus derselben Zeit stammende Aufzeichnung:

„**Aufgabe.** Um in S den Inhalt des Tetraeders (von vier Ebenen begrenzten Körpers) $abcda = T$ zu bestimmen, sei zuerst [Fig. 8]

$$cd \llcorner (cba = R),$$
$$ab \llcorner (bcd = R).$$

Das Stück ae von ab oder die Abszisse ae heiße x, die auf x ⌞ te Ordinate ef y und die auf af ⌞ te zweite Ordinate fg, z."

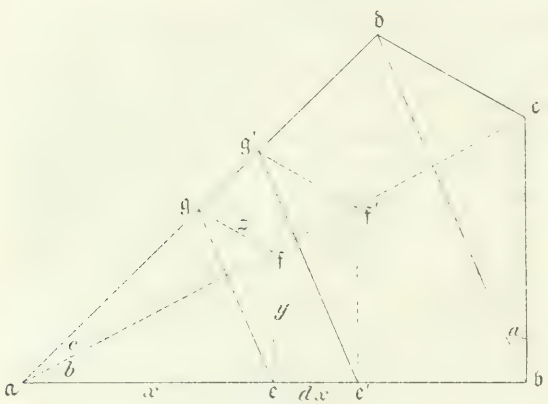


Fig. 8

„Bewegt sich △efg längs ab so fort, daß stets ef⌞ ab und in abcc bleibt, so ist, wenn der Weg von e, dx heißt, der durch △efg erzeugte Körper $K = -\frac{1}{2} dx \cdot \sin + y \cdot z$."

Die Herleitung dieser Formel, die Johann auf einem besonderen Zettel verzeichnet hat, wird nachher mitgeteilt werden.

„Nun ist [aus den rechtwinkligen Dreiecken efg und aef für $i = 1$:]

$$(1) \qquad \sin + y = \frac{\cot a}{\cot + z} = \frac{\alpha}{\cot + z},$$

$$(2) \qquad \sin + x = \frac{\cot b}{\cot + y} = \frac{\beta}{\cot + y},$$

$$\left(\text{und aus (1)} \qquad \cot + y = \frac{\sqrt{\cot^2 + z - \alpha^2}}{\alpha}\right), \quad \text{also}$$

$$x = - \arcsin \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\cot^2 + z - \alpha^2}},$$

$$dx = - \frac{\alpha\beta \cot + z \, d + z}{\sin^2 + z \, (\cot^2 + z - \alpha^2) \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\beta^2}{\cot^2 + z - \alpha^2}} \sqrt{\cot^2 + z - \alpha^2}}$$

$$= - \frac{\beta \cdot d + z \cdot \cos + z \cdot \operatorname{tg} a}{\left(\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1\right) \sqrt{\cos^2 + z \left(1 + \frac{\alpha^2}{\sin^2 b}\right) - \frac{\alpha^2}{\sin^2 b}}}.$$

Aber [aus dem rechtwinkligen Dreikant $a - bc\delta$]

$$\cot a = \cot c \cdot \sin b, \qquad \frac{a}{\sin b} = \cot c,$$

mithin

$$dx = -\frac{\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} c \cdot \beta \cdot d + z \cdot \cos + z}{\left(\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1\right)\sqrt{\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 c} - 1}},$$

folglich [unter Benutzung von (1)]

$$K = -\frac{\frac{1}{2}\beta \cdot \operatorname{tg} c \cdot z \cdot d + z \cdot \sin + z}{\left(\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1\right)\sqrt{\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 c} - 1}}.$$

Läßt man ba von b an $\backsim \infty$ wachsen, so ist $b, c \backsim 0$, also [$\cos b$,] $\cos c \backsim 1$ und

$$\beta \cdot \operatorname{tg} c = \frac{\cos b}{\sin b} \cdot \frac{\sin c}{\cos c} \backsim \frac{c}{b} \left(\text{da } \frac{\sin c}{\sin b} \backsim \frac{c}{b}\right) = \operatorname{tg} a,$$

also

$$K \backsim -\frac{+\frac{1}{2}\operatorname{tg} a \cdot z d + z}{\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1} = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{tg} a \cdot + z d + z}{\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1}.$$

Auf einem beiliegenden Zettel, dessen Rückseite den Anfang eines zweiten Entwurfes derselben militärischen Meldung enthält, finden sich (neben anderen Notizen) die schon erwähnten Andeutungen über die Herleitung der Formel für K. Johann scheint Folgendes gemeint zu haben.

Auf der Geraden $ab = u$ (Fig. 9) mögen in derselben Ebene die Geraden $ac = b\delta = v$ senkrecht stehen. Ferner sei $c\delta \parallel ab$ (§27 des *Appendix*). In den Punkten der Linie $c\delta$ sollen Lote der Länge w auf auf der Ebene $ab\delta c$ errichtet werden. Im Besonderen sei $ce = \delta f = w$. Endlich mögen die Ebenen durch ace, $b\delta f$, $abef$ gelegt werden. So entsteht ein durch vier Ebenen und ein Zylinderstück $c\delta fe$ begrenzter Körper, dessen Inhalt mit K bezeichnet werde.

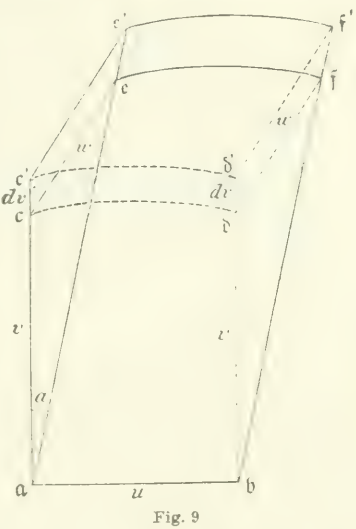


Fig. 9

Jetzt möge v um dv wachsen, indem ac und $b\delta$ um $cc' = \delta\delta' = dv$ verlängert werden. Errichtet man in c' und δ' Lote $c'e'$, $\delta'f'$, die die Ebene $abef$ in e' und f' schneiden, so erfährt der Inhalt einen Zuwachs dK, der, bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung, gleich dem Inhalt des Körpers ist, der ent-

steht, wenn auf der Grundfläche $c\delta\delta' c'$ lauter Lote der Länge w errichtet werden. Wenn aber auf der ebenen Grundfläche des Inhaltes p lauter Lote der Länge q errichtet werden, so entsteht ein Körper, für dessen Inhalt J in § 32, III des Appendix die leicht zu beweisende Formel:

$$J = -\frac{1}{4}p \sin + 2q + \frac{1}{2}pq$$

angegeben ist; dabei hat man wie im Vorhergehenden $i = 1$ zu setzen Nun ist der Inhalt der Grundfläche $c\delta\delta' c'$ gleich dem Produkt

$$dv \cdot c\delta = dv \cdot u \cos + v,$$

mithin

$$dK = + \frac{1}{4}dv \cdot u \cos + v \cdot \sin + 2w + \frac{1}{2}dv \cdot w \cdot u \cos + v.$$

Ferner erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ace, wenn der Winkel eac mit a bezeichnet wird:

$$\cot + w = \frac{\cot a}{\sin + v} = \frac{\alpha}{\sin + v},$$

folglich

$$\sin + w = \frac{\sin + v}{\sqrt{\alpha^2 + \sin^2 + v}}, \quad \cos + w = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \sin^2 + v}}$$

und

$$\sin + 2w = \frac{2\alpha \sin + v}{\alpha^2 + \sin^2 + v},$$

sodaß sich schließlich für dK der Ausdruck ergibt:

$$dK = -\frac{1}{2}u \cos + v\,dv \frac{\alpha \sin + v}{\alpha^2 + \sin^2 + v} - \frac{1}{2}u \cos + v\,dv \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin + v}{\alpha}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\alpha u \cdot \frac{2 \sin + v\,d(\sin + v)}{\alpha^2 + \sin^2 + v} - \frac{1}{2}u \cdot d(\sin + v) \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin + v}{\alpha}\right).$$

Hieraus findet man durch Integration nach v von 0 bis v:

$$K = \left[-\frac{1}{4}\alpha u \log \text{nat}(\alpha^2 + \sin^2 + v) - \frac{1}{2}u \cdot \sin + v \operatorname{arctg}\frac{\sin + v}{\alpha}\right]_0^v$$

$$+ \frac{1}{2}u \int_0^v \sin + v\,d \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin + v}{\alpha}\right) = -\frac{1}{2}u \sin + v \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin + v}{\alpha}\right),$$

wofür man auch schreiben kann

$$K = -\frac{1}{2}u \sin + v \cdot w.$$

Da der Inhalt der Grundfläche $ab\delta c$ des Körpers K

$$= -u \sin + v$$

ist, während $w = ce$ als seine Höhe angesprochen werden kann, so ergibt sich der Satz: „Der Körper K ist (*absolut*) = dem halben Produkt aus der Grundfläche und der Höhe."

Soweit Johann. Bedenkt man nunmehr, daß Gauss am 6. März 1832 an Wolfgang Bolyai über die Arbeit Johanns, den *Appendix*, geschrieben und jenen gebeten hatte, Johann aufzufordern, er möge sich mit der Aufgabe beschäftigen:

„den Kubikinhalt des Tetraeders (von vier Ebenen begrenzten Raumes) zu berechnen",

beachtet man ferner, daß Wolfgang eine Abschrift des Briefen an Johann sandte, die dieser am 6. April 1832 erhalten hat, so erscheint es als sehr wahrscheinlich, daß die soeben mitgeteilten Aufzeichnungen Johanns auf Veranlassung des Briefes von Gauss niedergeschrieben worden sind, und damit stimmt auch vortrefflich das Datum des 5. Mai 1832.

Höchst merkwürdig ist, daß *die Methode, deren sich* Gauss *zur Kubierung des Tetraeders bedient hatte, genau dieselbe ist wie die von Johann.* Das zeigt eine aus dem März 1832 stammende Notiz, die aus Gaussens Nachlaß in den Werken (Bd. VIII, S. 228) abgedruckt ist; Gauss hat genau dasselbe Spezialtetraeder (das bei ihm nur 3142 statt $abc\delta$ heißt), genau dieselbe Zerlegung durch Ebenen senkrecht zu ab (31).

In den späteren Aufzeichnungen Johanns finden sich noch Umgestaltungen der Formel

$$T = \tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tg} c \cdot \int_0^z \frac{z\,d(\cos\dotplus z)}{\left(\frac{\cos^2\dotplus z}{\cos^2 a} - 1\right)\sqrt{\frac{\cos^2\dotplus z}{\cos^2 c} - 1}},$$

deren Zweck die Ausführung der Integration mittels elementarer Funktionen („in endiger Form") ist. Da die hierauf gerichteten Bemühungen der Natur der Sache nach vergeblich bleiben mußten, soll von ihrer Mitteilung abgesehen werden.

Zweite Methode

Zerlegung mittels Ebenen, die durch ab oder $c\delta$ gehen

Auf dem bereits erwähnten Zettel, der der Aufzeichnung über die Kubierung des Tetraeders aus dem Mai 1832 beigelegt ist, findet sich auch noch folgende Bemerkung:

„Dreht sich $\triangle abc$ [Fig. 8, S. 110] um ab, so ist das Differential dK des durch dasselbe erzeugten rechten Kegels

$$= -2\pi dx \sin^2\dotplus y."$$

Gemeint ist die Scheibe, die durch Rotation von $ee'f'f$ um die Achse ab entsteht. Die angegebene Formel findet sich im Appendix § 32, VII: π soll hier wieder den *Quadranten* bedeuten.

„Aber

$$x = -\infty \arcsin \frac{\beta}{\cot \dotplus y},$$

$$dx = -\infty \frac{d\frac{\beta}{\cot \dotplus y}}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\cot^2 \dotplus y}}} = -\infty \frac{\beta \cdot - d\cot \dotplus y}{\cot \dotplus y \sqrt{\cot^2 \dotplus y - \beta^2}};$$

also

$$dK = \dotplus \frac{2\pi\beta d \dotplus y \cdot \sin^2 \dotplus y}{\cos \dotplus y \sqrt{\cos^2 \dotplus y - \beta^2 \sin^2 \dotplus y}} = -\infty \frac{2\pi \cdot d\cos \dotplus y \cdot \sin \dotplus y}{\cos \dotplus y \sqrt{\frac{\cos^2 \dotplus y}{\cos^2 b} - 1}}.“$$

„Setzt man, um den einfachsten und zugleich merkwürdigsten Fall zu haben, $b \backsim 0$, so wird

$$dK \backsim \frac{2\pi d\cos \dotplus y}{\cos \dotplus y}$$

und

$$K = 2\pi \log \text{nat} \cos \dotplus y + (C = 0)$$
$$= 2\pi \cdot \text{Abszisse von } y \text{ in } L.“$$

„Wächst nun bei dem rechtwinkligen asymptotischen Tetraeder T a um da, so ist offenbar

$$dT = \frac{da}{4\pi} \cdot 2\pi \log \cos \dotplus \mathfrak{eg}$$

und [in dem rechtwinkligen Dreieck $\mathfrak{efg}$]

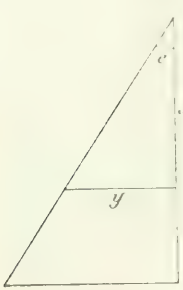


Fig. 10

$$\cot \dotplus \mathfrak{eg} = \cot \dotplus y \cdot \cos a,$$

also

$$\cos \dotplus \mathfrak{eg} = \frac{\cot \dotplus y \cdot \cos a}{\sqrt{1 + \cot^2 \dotplus y \cdot \cos^2 a}}$$

und

$$T = \tfrac{1}{2} \int da \log \text{nat} \frac{\cot \dotplus y \cdot \cos a}{\sqrt{1 + \cot^2 \dotplus y \cdot \cos^2 a}}.“$$

In Aufzeichnungen, die ungefähr aus dem Jahre 1856 stammen, hat Johann diesen Gedanken weiter ausgeführt. Nachdem er die vorhin mitgeteilte erste Methode auseinandergesetzt hat, sagt er:

„Den Inhalt des Tetraeders in S zu bestimmen, eröffnet sich noch ein schöner Weg, wenn man zuerst den rechten Kegel ausdrückt: was (unter den unendlich vielen möglichen) auf zwei einfachere Arten geschehen kann; nämlich einmal mit der Grundfläche parallele Schnitte; zweitens durch die Achse senkrechte Ebenen. Auf letztere Art ist [Fig. 10]:

$$\cot \dotplus y = \frac{\cot e}{\sin \dotplus x}; \qquad d(\text{Kegel}) = -\frac{dx \cdot 2\pi \cdot \sin^2 \dotplus x}{\sin^2 \dotplus x + \cot^2 e}.$$

Dann das Tetraeder durch die $c\delta$ enthaltenden Ebenen geschnitten.“

Daneben findet sich eine der hier als Figur 11 bezeichneten ähnliche Figur (jedoch ohne Bezeichnung der Punkte usw. durch Buchstaben). Der

von Johann angedeutete Zusammenhang mit dem geraden Kegel besteht darin, daß das Volumenelement $ctt'\mathfrak{d}$ des Tetraeders auch als Element eines Kreiskegels mit der Achse $c\mathfrak{d}$ angesehen werden kann, der durch Drehung des rechtwinkligen Dreiecks $c\mathfrak{d}t$ erzeugt wird.

An einer anderer Stelle ist Johann auf diesen Gedanken zurückgekommen. Dort heißt es:

„Ist ab [Fig. 11] senkrecht auf bc, $c\mathfrak{d}$ senkrecht auf abc, $b = bc$, t in ba, g gleich dem Winkel bct, $l = ct$, m gleich dem Winkel $c\mathfrak{d}t$,

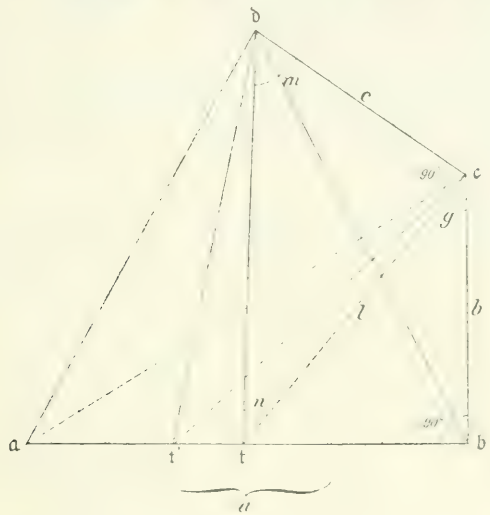


Fig. 11

n gleich dem Winkel $ct\mathfrak{d}$, T [das Volumen des Tetraeders] $abc\mathfrak{d}$, so ist:

$$\cot \dotplus l = \cot \dotplus b \cdot \cos g,$$

$$\cot m = \cot \dotplus l \cdot \sin \dotplus c = \cot \dotplus b \cdot \cos g \cdot \sin \dotplus c,$$

$$\cot n = \cot \dotplus c \cdot \sin \dotplus l = \frac{\cot \dotplus c}{\sqrt{1 + \cot^2 \dotplus b \cdot \cos^2 g}},$$

$$\frac{dT}{dg} = \tfrac{1}{4} \frac{\cos^2 \dotplus c \cdot \cos^2 \dotplus l}{\sqrt{1 + \cot^2 \dotplus l \cdot \sin^2 \dotplus c}}$$

$$\dotplus \tfrac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \dotplus l \cdot \sin^2 \dotplus c}}\right) \log \frac{\cot \dotplus b \cdot \cos g}{\sqrt{1 + \cot^2 \dotplus b \cdot \cos^2 g}}$$

$$= \tfrac{1}{4} \frac{\cos^2 \dotplus c \cdot \cot^2 \dotplus b \cdot \cos^2 g}{(1 + \cot^2 \dotplus b \cdot \cos^2 g \sqrt{1 + \cot^2 \dotplus b \cdot \cos^2 g \cdot \sin^2 \dotplus c}}$$

$$\dotplus \tfrac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \dotplus b \cdot \cos^2 g \cdot \sin^2 \dotplus c}}\right) \log \frac{\cot \dotplus b \cdot \cos g}{\sqrt{1 + \cot^2 \dotplus b \cdot \cos^2 g}}.$$

Aber dieser Ausdruck ist noch viel verwickelter als der auf dem ersten Wege erhaltene, indem hier nicht nur zwei Quadratwurzeln, sondern auch ein Logarithmus vorkommt."

Es ist ein eigentümliches Zusammentreffen, daß dieser Weg zur Berechnung des Tetraeders $abcd$ genau derselbe ist, den Lobatschefskij in seiner Abhandlung *Ueber die Anfangsgründe der Geometrie* (1829) eingeschlagen hatte. Lobatschefskij gibt auch den richtigen Ausdruck für $\frac{dT}{dg}$; Johann hat bei der Ausrechnung ein Versehen gemacht.

Dritte Methode

Zerlegung mittels Hypersphären, die der Grundfläche abc *parallel sind*

Den beiden ersten Methoden hat Johann (in Aufzeichnungen ungefähr aus dem Jahre 1856) zwei neue hinzugefügt, ohne sie freilich vollständig durchzuführen. Die dritte Methode besteht in der Zerlegung des Tetraeders $abcd$ mittels Hypersphären, die zur Grundfläche parallel (äquidistant) sind.

„[Es sei] ab [Fig. 12] senkrecht auf bc, abc auf cd, $a = ab$, $b = bc$, $c = cd$, e in cd, $x = ce$. Die durch e [gelegte] mit abc parallele Hyper-

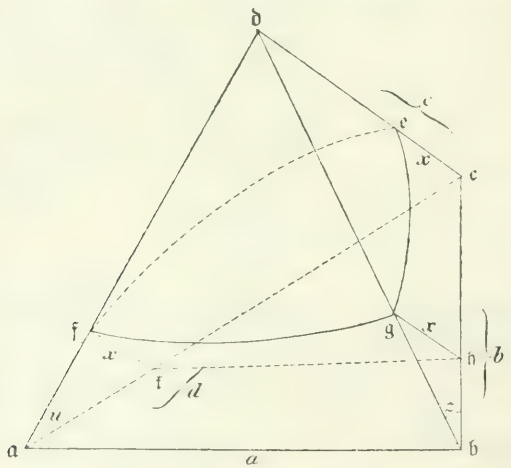


Fig. 12

sphäre schneide das Tetraeder $abcd$ in dem hypersphärischen Dreieck feg. Ist gh senkrecht auf bc [und der Winkel $gbh = z$], so ist:

$$\cot z = \cot \measuredangle c \cdot \sin \measuredangle b,$$

$$\sin \measuredangle bh = \frac{\cot z}{\cot \measuredangle x} = \frac{\cot \measuredangle c \cdot \sin \measuredangle b}{\cot \measuredangle x},$$

$$ch = b \measuredangle \arcsin \left(\frac{\cot \measuredangle c \cdot \sin \measuredangle b}{\cot \measuredangle x} \right).$$

Ist desgleichen ff senkrecht auf ac, $d = ac$ [und der Winkel $faf = u$], so ist

$$\cot u = \cot \measuredangle c \cdot \sin \measuredangle d,$$
$$= \cot \measuredangle c \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \measuredangle a \cdot \cos^2 \measuredangle b},$$
$$\sin \measuredangle \mathfrak{af} = \frac{\cot u}{\cot \measuredangle x} = \frac{\cot \measuredangle c \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \measuredangle a \cdot \cos^2 \measuredangle b}}{\cot \measuredangle x},$$
$$\left[\mathfrak{cf} = d \measuredangle \arcsin \left(\frac{\cot \measuredangle c \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \measuredangle a \cdot \cos^2 \measuredangle b}}{\cot \measuredangle x} \right) \right].$$

Nun ist das Dreieck $\mathfrak{hcf}$ [bekannt] aus $\mathfrak{ch}$, Winkel $\mathfrak{hcf}$, $\mathfrak{cf}$, woraus auch die Winkel bei $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{f}$ nach den Formeln für die allgemeinen Dreiecke berechnet werden können. Dann [läßt sich] dadurch [das hypersphärische] Dreieck $\mathfrak{gef}$ berechnen, womit man das Differential des Tetraeders [, nämlich] das zwischen den zwei parallelen Flächen [im Abstande x und $x + dx$] begrenzte Stück des Tetraeders $\mathfrak{abcd}$ erhält, auf dessen Integration nunmehr alles ankommt."

Johann fügt hinzu, daß dieser Weg allerdings verdiene ausgeführt zu werden, daß jedoch allem Anschein nach die Formeln verwickelt ausfallen würden. J. Frischauf hat im Jahre 1876 im seinen *Elementen der absoluten Geometrie* unabhängig von Johann Bolyai, dessen Nachlaß damals noch der Durchsicht harrte, die dritte Methode angegeben, ohne jedoch die Ausführung der Rechnungen mitzuteilen, weil ihm, wie Johann, die Formeln zu wenig einfach erschienen. Nachdem jedoch Stäckel im Jahre 1901 über Johanns Untersuchungen berichtet hatte, ist Frischauf auf die dritte Methode zurückgekommen und hat gezeigt, daß man mit ihrer Hilfe schließlich auf dieselbe Integralformel geführt wird, die bei der ersten Methode auftrat; dabei ergibt sich auch ein Beweis der Formel für das Körperelement K, die bei der ersten Methode benutzt wurde.

Vierte Methode

Zurückführung auf asymptotische Tetraeder

Den Gedanken zu einer vierten Methode, der vielleicht auch aus der Jugendperiode stammt, enthält die folgende kurze Notiz:

„Am einfachsten dürfte man wohl zum Ausdruck des Tetraeders gelangen, wenn man $\mathfrak{ab} \perp \mathfrak{bcd}$, Winkel $\mathfrak{bcd}$ gleich R [Fig. 13, S. 118], $\mathfrak{bn}$, $\mathfrak{ap} \parallel\parallel \mathfrak{cd}$ annimmt und den Inhalt von der dreikantigen endlosen Röhre sowohl der Grundfläche $\triangle \mathfrak{abc}$ als jener $\triangle \mathfrak{abd}$ sucht und letztere Röhre von der ersteren abzieht, indem der Unterschied hier offenbar $\mathfrak{abcd}$ ist. Die Größe der Röhre auf dem Dreieck $\mathfrak{abd}$ findet man einfachst so . . . aber endig wird es wohl ebensowenig sich ausdrücken lassen."

Asymptotische Tetraeder, wie die von Johann betrachteten, kommen auch bei Lobatschefskij vor, der eine sehr einfache, direkte Methode

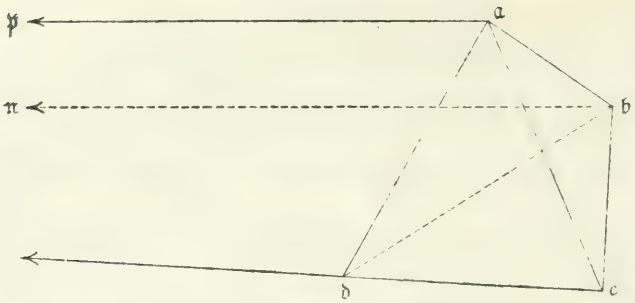


Fig. 13

zu ihrer Berechnung angegeben hat. Um so wichtiger wäre es gewesen, wenn die Methode, die Johann zur *direkten* Berechnung asymptotischer Tetraeder anwenden wollte, sich in seinen Papieren hätte finden lassen; leider ist das nicht gelungen.

Es lohnt sich, einen Blick zurückzuwerfen und die Gesamtleistung Johann Bolyais für die Aufgabe des Kubierung des Tetraeders ins Auge zu fassen. Er hat die Aufgabe auf verschiedene Arten angegriffen und seine Darlegungen zeigen, das er deren Eigenart vollständig durchschaut hatte. Es ist ihm jedoch nicht gelungen, die Formeln für den Inhalt des Tetraeders auf eine einfache, für die Berechnung geeignete Gestalt zu bringen, zum Teil aus dem Grunde, weil er in dem Wahn befangen war, die dabei auftretenden Integralformeln müßten sich durch geschlossene Ausdrücke darstellen lassen.

Auch auf diesem Gebiete sind Gauss und Lobatschefskij seine Nebenbuhler gewesen. Gauss hat nur zwei Formeln, ohne Beweis, aufgeschrieben; *sie stimmen mit den von Johann gefundenen durchaus überein.* Dagegen hat Lobatschefskij ausführliche Untersuchungen angestellt, durch die die analytische Darstellung der Integralformeln für das Tetraedervolumen erheblich gefördert worden ist, und man wird ihm in dieser Beziehung den Vorrang vor Johann geben müssen.

Während über die beiden ersten der zu Anfang dieses Kapitels aufgezählten Fragen umfangreiche Aufzeichnungen Johanns vorhanden sind, besitzen wir für die dritte Frage, ob es sich entscheiden läßt, welches der subjektiv möglichen Systeme der Geometrie in Wirklichkeit gelte, nur sehr wenige und unzureichende Äußerungen. Über die „praktische Entscheidung" durch Messungen hat Johann 1851 in den *Bemerkungen zu* N. Lobatschefskijs *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien vom Jahre 1840* gehandelt. Auf diese Untersuchungen wird im XVI. Kapitel ausführlich eingegangen werden;

hier sei nur bemerkt, daß er zu dem Ergebnis kommt, durch irdische Messungen könne nicht entschieden werden, ob Σ oder irgend ein S gelte; aber auch die astronomischen Beobachtungen hätten bis jetzt keinen Aufschluß über die Frage gegeben.

Neben eine solche Entscheidung *a posteriori* stellt Johann jedoch eine Entscheidung *a priori*, und gerade diese hat ihn, wenn nicht früher, schon im Jahre 1830 beschäftigt. Dies zeigen die Schlußworte des *Appendix:* „Es bliebe endlich übrig (um den Gegenstand völlig zu erschöpfen), den Beweis dafür zu geben, daß es unmöglich ist (ohne irgend eine Annahme) zu entscheiden, ob Σ oder irgend ein (und welches) S stattfindet: dies mag jedoch einer geeigneteren Gelegenheit vorbehalten bleiben".

Als Wolfgang, wie zu Anfang dieses Kapitels erwähnt wurde, am 20. April 1835 an Gauss schrieb, sein Sohn behaupte einen evidenten Beweis davon zu haben, „daß es absolut unmöglich sei dem menschlichen Auge, es einzusehen, ob das XI. Axiom wahr sei oder nicht", hatte er kurz zuvor am 15. April, aus Domáld einen Brief Johanns erhalten, in dem dieser seine Gedanken hierüber kurz dargelegt hatte, zu kurz, denn es läßt sich daraus nicht mit Sicherheit entnehmen, worauf Johann eigentlich hinauswollte. Immerhin scheint es angebracht, den Brief abzudrucken.

„Da ich sehe, daß [Sie] in Bezug auf die *impossibilitas* noch nicht beruhigt sind (ich selbst pflege in bezug auf etwas weder *eo ipso* noch *per se* zu ruhen, solange ich darüber nicht beruhigt und befriedigt bin, und liebe es, der allerstrengste Richter darüber zu sein, wie auch jede Objektion und jeder Skrupel des Zensors mir gerade willkommen ist), so sende ich eine kleine Aufklärung. Die Sache ist *per se* so ungeheuer wichtig und würdig, und es darf, gerade weil sie so heikel ist, mit Recht nichts versäumt werden, um sie völlig ins Reine zu bringen. Welcher Gewinn (sowohl für die Sache selbst als für das menschliche Geschlecht), wenn auch nur *ein* Gaussisches Talent in künftigen Zeiten dadurch vor dem Versinken ins Bodenlose gerettet wird? Der leichteren Übersichtlichkeit und der Klarheit wegen dränge ich die Demonstration möglichst kurz zusammen und beleuchte sie dann mit einigen Anmerkungen."

„1. Entweder gibt es ein (endliches) $i\ \{p + q\}$, oder nicht, und wenn in jener Gleichung, die den $\wedge$ des ebenen $\triangle$s durch die Seiten ausdrückt, aus der, wie bekannt, das übrige alles fließt und die ich der Kürze wegen mit $\mathfrak{X}$ bezeichne, im zweiten Falle der *limes* jenes Winkels genommen wird, nach dem α [Fig. 14, S. 120] für $i \backsim \infty$ tendiert: *constat*, daß die erwähnte Formel absolut wahr ist. Es ergeben sich also α, β, γ durch a, b, c und i."

„2. Und es ist klar: daß (ich trage die Demonstration in *direkter* Form vor) aus der Untersuchung der *Peripherie* irgend eines und desselben △s *durch* $\mathfrak{X}$ *per se* niemals bestimmt werden kann, ob i existiert oder nicht; offenbar wäre nur dies nötig; denn wenn man auch wüßte, daß S besteht, so ist klar, daß *a priori* in Bezug auf i keine weitere Bestimmung gemacht werden kann als eine solche, die schon durch *Zahlen definiert* ist; und wenn wir ein vollkommenes *planum*, eine vollkommene *recta* machen könnten und einen eben solchen *circinus*, dann könnten wir *a posteriori* (und in dieser Form auch nur so) i wenigstens approximativ determinieren; und wir könnten (so unmöglich es auch ist, ein vollkommenes *planum* usw. zu machen) mit einer, in Rücksicht auf das vorgestreckte Ziel, für die Praxis durchaus genügenden Akkuration i konstruieren (wenn nur bekannt wäre, daß es vorhanden ist). Man kann also aus der Peripherie des planen △s mit Hilfe von $\mathfrak{X}$, gerade weil $\mathfrak{X}$ den ∧ nicht anders als mit Hilfe von i ergibt, in Bezug auf i *offenkundiger* Weise niemals *prorsus* irgend etwas bestimmen. Diese *conclusio* wäre nicht richtig, wenn in $\mathfrak{X}$ an die Stelle von i gesetzt würde $p + q$ (wo p, q entweder beide reale oder beide imaginäre Längen bedeuten). Denn, wenn ich dann durch die 3 ∧ die eine Seite a ausdrücke, so sieht man leicht, daß $\cos\frac{a}{p+q}$ = wäre einer realen Quantität, was offenbar nur dann möglich ist, wenn $\frac{a}{p+q}$ eine *quantitas pura*, nicht *mixta* (auch ich nenne sie seit langer Zeit so), also entweder p oder $q = 0$ und auch i *pura* [wäre]. Dann würde sich also für i eine gewisse Bestimmung ergeben. Da ferner $\cos\frac{a}{p} = \cos(2n\pi - \frac{a}{p})$ *pro quovis n integro reali*, so zeigt sich handgreiflich, daß, da *pro respective iisdem* $\alpha, \beta, (\gamma), c$ vom Ende von c aus usw. nur *ein planes* △ möglich ist (weil $a\bar{c}$ nicht mehrmals $b\bar{c}$ schneidet), notwendig $2n\pi - \frac{a}{p}$ ein *mixtum*, und daher (da $2n\pi$ real ist) p ein *pure imaginarium* wäre. Aus der obigen generalen Annahme, daß nämlich $i = p + q$ sei, folgte also nur soviel an Bestimmung, daß i *real* sei. (Die gegenwärtige Demonstration kann leicht auch apagogisch geführt werden.) Es wäre also nur noch [zu zeigen], daß man *noch mehr* wie dies in Bezug auf i nicht bestimmen kann."

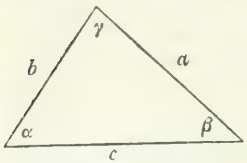


Fig. 14

Ungefähr aus derselben Zeit, vielleicht sogar etwas früher, ist der Anfang eines Entwurfes zu einem

„Beweis der Unmöglichkeit, das XI. Euklidische Axiom zu beweisen oder umzustoßen."

„*Lehrsatz.* Ob (an und für sich in der Wirklichkeit), wenn $bn \parallel am$ ist, $bam + abn =$ oder $< 2R$ sei; ob für jede endliche Länge x das zugehörige X (§ 23 [des *Appendix*]) — oder > 1 sei; ob, wenn bnn in bam liegt, jede zwei Gerade amm, bnn, aus den Endpunkten einer dritten ab, in einer Ebene, innere Winkel bam, abn mit ab bildend, deren Summe $< 2R$ ist, sich schneiden, oder auch dabei ein Nichtschnitt statthaben könne, — kurz, ob die Euklidsche Raumlehre oder irgend ein antieuklidisches System in der Wirklichkeit bestehe, läßt sich durch keine logischen Schlüsse entscheiden. Nur so viel läßt sich bei $bn \parallel am$ herausbringen, daß die Summe $bam + abn$ nicht $> 2R$, ferner jedes X nicht < 1. Ob (im Sinne des § 20) i endlich oder unendlich sei, bleibt jedem Verstande, welchem es nicht unmittelbar klar ist, ein unenthüllbares Geheimnis. Da jedoch eine solche axiomatische Anschauung keinem menschlichen Verstande einleuchtend ist und je sein kann, so bleibt es ewig ein Rätsel."

Ferner ist ein Briefumschlag mit Johanns Adresse vorhanden, auf dessen Innenseite dieser, der Briefumschläge oft zu Notizen verwendete, folgende Bemerkung eingetragen hat:

„Durch die Trigonometrie geht es also nicht: bei aller Anwendung derselben findet man nur Gereimtheiten im unbestimmten Systeme, nie erfolgt die Bestimmung des Systems daraus. Womit denn der Beweis der Unmöglichkeit i zu bestimmen, vollendet ist."

„Kann man sich bei diesem Umstande beruhigen? Gar sehr wohl! Und schön genug bleibt die Raumlehre doch. Es liegt eben in der Natur der Sache, daß dieses nicht durch logische Schlüsse, [sondern] nur durch unmittelbare Anschauung erkannt werden könne. Ja, selbst auch für Engel ist es unzugänglich, wenn sie es nicht unmittelbar erschauen. Es gibt nur ein Wesen, dessen Anschauung die ganze Natur offen steht: Gott, den Raummeister."

In dieselben Gedankenreihe gehört auch eine Aufzeichnung, die aus der Zeit zwischen 1850 und 1858 stammt:

„Man erhält bei der Analyse eines Systems [von Punkten] in der Ebene offenbar ganz dieselben Formeln wie auf der Kugel, und da nun auf der Kugel bei vollständiger Analyse stets Konsequenz gefunden werden muß, da die Kugeltrigonometrie *absolut* gilt: so ist klar, daß ebenso in der Ebene bei jeder Betrachtung von Punktsystemen ewig Konsequenz bestehen müsse. Daraus ist denn evident, daß aus S in einer Ebene nie [ein Widerspruch hergeleitet werden kann]. Auch direkt kann man nicht zur Bestimmung von i gelangen. Denn welchen Weg man auch immer in der Ebene befolgen mag, welchen Teil der Ebene immer betrachten, so kann man denselben sofort *absolut* vollständig ausdrücken, was oft das

Meiste ist, was man bisher leisten kann, und es erfolgt keine Bestimmung von i daraus. Aber i bleibt ja doch nicht *völlig* unbestimmt. Es läßt sich vielmehr zeigen, daß, *wenn* der Ausdruck des ebenen rechtwinkligen Dreiecks so aussieht:

$$\sin \dotplus \frac{b}{r} : \sin \dotplus \frac{c}{r} \backsim \sin \alpha c$$

für $r \backsim i$, dann i weder ein gemischter Stand, noch 0, sondern ein glatter Stand sein müsse. Denn usw."

Unter einem *glatten Stand* versteht Johann eine reelle oder eine rein imaginäre Größe, unter einem *gemischten Stand* eine wesentlich komplexe Größe. Das Wort *Stand* sucht er durch die Bemerkung zu rechtfertigen, daß man ja vom Stande eines Thermometers spreche, der durch eine positive oder negative reelle Größe ausgedrückt werde; wenn man das Wort *Skalar* verdeutschen wollte, so wäre die Übersetzung durch *Stand* ernstlich in Betracht zu ziehen.

Wenn Johann hinzufügt: „Aber ob i endlich oder unendlich sei, bleibt bei Betrachtung in einer Ebene ewig unentschieden. Nun ist aber die Frage, ob nicht etwa Betrachtungen im Raume doch zur Rechtfertigung von Σ verhelfen könnten", so formuliert er damit einen Einwand, den er später gegen seinen alten Beweis erhoben hatte. „Bei der lateinischen Herausgabe der Grundzüge der neuen selbständigen Raumlehre hoffte der Verfasser noch die Unmöglichkeit usw. zeigen zu können. Bei näherer Untersuchung zeigte es sich vielmehr, daß sowohl eine Möglichkeit da sei, für das Euklidsche System zu entscheiden, als auch eine des Unentschiedenbleibens, und daß man (solange die Sache noch unentschieden ist) weder von einer Entscheidbarkeit noch von einer Unentscheidbarkeit a priori einen Beweis geben könne, sodaß ein weiterer Versuch zu entscheiden einem Schatzgräber gliche . . . Das XI. Axiom ist entweder erweislich oder unerweislich. Eine Unerweisbarkeit läßt sich durchaus nicht beweisen, und auch ein Beweis davon könnte nur durch die Tat selbst, d. i. durch einen wirklichen Beweis, nachgewiesen werden."

Wann Johann dazu gelangt ist, die Unvollständigkeit seines Beweisversuches zu erkennen, hat sich nicht mit Sicherheit feststellen lassen. Es scheint, daß ihm schon um 1837 Bedenken gekommen sind, denn in Randbemerkungen zu der deutschen Fassung des *Appendix*, die aus dieser Zeit stammen, äußert er sich so:

„Ob entschieden werden und die Raumlehre auch in dieser Hinsicht vollendet werden könne, welches von beiden statthabe, ob i endlich oder unendlich, ist bis jetzt unbekannt. Soviel ist gewiß, daß eine Entscheidung, wenn sie möglich ist, nur auf dem hier angedeuteten Wege errungen werden kann."

Dieser „angedeutetete Weg“ aber besteht darin, daß die absolute Raumlehre vollständig durchgeführt und untersucht wird, ob sich dabei ein Widerspruch ergibt.

Johanns Versuche, zu beweisen, daß es sich nicht entscheiden lasse, ob Σ oder irgend eines der Systeme S gelte, münden also schließlich in der Frage aus, ob das System S mit unbestimmtem i *konsistent* im Sinne der neueren Mathematiker, das heißt, in sich frei von Widersprüchen ist. Während nun Johann im Jahre 1825 von der Widerspruchslosigkeit seiner neuen Geometrie vollständig überzeugt war und daran auch in den folgenden Jahren festgehalten hat, sind ihm, wie die mitgeteilten Bemerkungen zeigen, später Bedenken gekommen, ja er äußert sich sogar in den Aufzeichnungen, denen die vorher mitgeteilten Stücke entnommen sind, dahin, „insofern jedoch, wenn S logisch denkbar ist, auch Σ [es ist] (als besonderer Fall), nicht aber umgekehrt S, so scheint Σ mehr für sich zu haben, obschon keineswegs ausgemacht.“ Im Jahre 1856 hat Johann sogar geglaubt, durch räumliche Betrachtungen wirklich einen Widerspruch in S nachgewiesen und damit die absolute Gültigkeit des Parallelenaxioms dargetan zu haben.

Es liegt eine ergreifende Tragik darin, daß Johann Bolyai in seinem Alter an der Einsicht irre geworden ist, die seinen unsterblichen Ruhm ausmacht, daß nämlich die von ihm begründete absolute Geometrie in sich widerspruchslos ist und es sich nicht entscheiden läßt, welches der subjektiv möglichen geometrischen Systeme der Beschreibung der geometrischen Tatsachen zu Grunde zu legen ist. Diese Tragik wird dadurch noch erschütternder, daß der Einwand, den Johann machte, daß nämlich die Äquivalenz der absoluten Trigonometrie der *Ebene* mit der sphärischen Trigonometrie noch nicht die Widerspruchslosigkeit der absoluten Geometrie im *Raume* sicherstelle, durchaus berechtigt war und seinem Scharfsinn Ehre machte. Jedoch gehören diese Betrachtungen einer späteren Zeit an als der, die wir jetzt zu schildern haben, und sollen daher auf das XVIII. Kapitel aufgespart werden.

XIV. Kapitel

Wolfgang und Johann Bolyais Arbeiten über imaginäre Größen

In dem Briefwechsel, den Wolfgang und Johann Bolyai während der Jahre 1835—1837 unterhielten, spielt die Lehre von den imaginären Größen eine wichtige Rolle.

Über Wolfgangs Versuche, in dieses damals recht dunkle Gebiet der Mathematik Licht zu bringen, ist bereits im V. Kapitel berichtet worden, und daß die imaginären Größen für Johanns geometrische Untersuchungen Bedeutung gewonnen hatten, hat das vorhergehende Kapitel gezeigt. Es erscheint daher an und für sich durchaus glaubwürdig und wird auch durch Aufzeichnungen in seinem Nachlaß bestätigt, wenn dieser behauptet, seine Gedanken über den Gegenstand seien im wesentlichen schon im Jahre 1831 ausgebildet worden.

Die Zwistigkeiten zwischen Vater und Sohn, zu denen es bei der Entdeckung der absoluten Geometrie durch Johann gekommen war, sind zum Teil dadurch veranlaßt worden, daß Wolfgang, wenn auch nicht eifersüchtig auf die Erfolge seines Sohnes, doch ängstlich auf die Erhaltung der väterlichen Autorität bedacht war. Es ist daher erklärlich, daß die Kritik, die Johann in seinen Briefen an den Ausführungen des Vaters über die imaginären Größen übte, diesen empfindlich berührte, um so mehr, als Johann seine Einwände in schonungsloser Schärfe vortrug. Dementsprechend fielen Wolfgangs Antworten aus. Johann war jedoch inzwischen älter geworden, er hatte seinen Wert erkannt, er fühlte sich auch, wie gelegentliche Äußerungen zeigen, als Hauptmann dem Professor gegenüber gleichberechtigt, und so wurde der Streit immer erbitterter.

In dem Hauptpunkt der sachlichen Meinungsverschiedenheiten war das Recht sicherlich auf Johanns Seite. Wolfgang hatte auf Grund ziemlich unklarer Betrachtungen über den Begriff der absoluten Multiplikation und Division eine Erklärung der Proportion im Gebiete der komplexen Größen aufgestellt, aus der die Gleichung

$$1 : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : 1$$

folgte. „Es kann nicht möglich sein", schreibt Johann, „daß Sie dies[en Fehler] nicht bemerken und durch die Exaktheit meiner Behauptung nicht überzeugt werden, denn die Sonne strahlt nicht so klar wie dieses;

und wenn Sie sich überzeugt haben, so überzeugen Sie sich auch davon (was Ihnen nicht zu kleinerem Ruhme gereicht als Ihre Lehren), daß Sie trotz allem schönen und meisterhaften Scharfsinn, trotz der echten Gründlichkeit und des Strebens nach Evidenz in dieser Sache — als Mensch und, wie auch ich bisher nicht nur einmal, als Rechner — strauchelten und auf ganz unklarer Grundlage gebaut haben. Daß Sie einem so überaus wichtigen Gegenstande so lange befangen gegenüber standen, hat seinen Grund darin und kommt davon, daß Sie Ihre einmal liebgewonnene und angenommene, jedoch unzweckmäßige Grundidee, wonach Sie die Multiplikation zunächst für $+1$, nachher für $*-1$ zu Ende zu führen wünschten, durchaus nicht aufgeben wollten, und als Sie die Kollision wahrnahmen, waren sie bereit, lieber der Definition der Proportion Zwang anzutun, als von Ihrer geliebten Grundidee abzulassen. Nun ist es unmöglich, daß Sie nicht selbst den Zusammenbruch ihrer Theorie einsähen. Eine Dunkelheit und einen Irrwahn, der so lange gewährt hat, zu beheben, bereitet mir und, wie ich hoffe, auch Ihnen Vergnügen und Wonne."

So standen die Dinge, als im Herbst 1837 ein Kollege von Wolfgang am ev. ref. Kollegium zu Maros-Vásárhely, Professor Alexius Dósa, diesen auf eine Mitteilung in der Märznummer des Intelligenzblattes der *Allgemeinen Literaturzeitung* (Halle-Leipzig) aufmerksam machte. Dort wurde daran erinnert, daß die Zeit für die Einsendung der Arbeiten zur Bewerbung um die laufenden Preise der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig mit dem Monat November ablaufe; gleichzeitig wurden die Preisaufgaben wiederholt. Die mathematische, von dem ordentlichen Professor der Mathematik an der Universität Leipzig M. W. Drobisch (1802—1896) gestellt, lautete (in der dort gegebenen deutschen Übersetzung des ursprünglichen lateinischen Textes) folgendermaßen:

„Wie bekannt, sind die imaginären Größen gegenwärtig nicht nur in der Analysis, sondern auch in der analytischen Geometrie von häufigem Gebrauch. Gauss hat gezeigt, daß diese Größen, denen man gewöhnlich alle Realität abzusprechen pflegt, gleichwohl so wenig als die negativen Größen einer Versinnlichung entbehren. Außerdem haben andere Geometer, namentlich Buée, Mourey, Warren, zu beweisen gesucht, daß, wenn man in geometrischen Untersuchungen auf imaginäre Größen kommt, sich diese auch immer konstruieren lassen. Da diese Lehre jedoch noch nicht allgemeine Anerkennung gefunden hat, so wirft die Gesellschaft die Frage auf:

ob die Lehre von der Konstruktion der imaginären Größen sich so begründen und ausbilden läßt, daß vermöge derselben

nach sicheren Regeln die Konstruktionen angegeben werden können, die überall, wo sich die Geometer der imaginären Größen bedienen, versteckt liegen mögen, oder, wenn dieses unmöglich, daß wenigstens die Bedingungen erhellen, unter denen jene Größen konstruierbar sind."

Hierdurch schien die Möglichkeit gegeben, daß unparteiische Richter den Streit zwischen Wolfgang und Johann schlichteten. Jener schrieb daher an Johann, setzte ihn von der Preisaufgabe in Kenntnis, erklärte, daß er sich um den Preis bewerben und sogleich an die Arbeit gehen werde, und forderte ihn auf, das Gleiche zu tun.

Johann verfaßte nun eine Abhandlung, die aus einem Bogen (acht Seiten Quartformat) bestand, und übergab sie seinem Vater. Es wurde ausgemacht, daß keiner von beiden die Arbeit des andern lesen solle; beide Abhandlungen sollten zusammen einem der Wiener Bekannten Wolfgangs übergeben werden, damit er sie von dort aus an den Sekretär der Leipziger Gesellschaft, Professor Kühn, gelangen ließe. Wolfgang und Johann hofften, Graf Teleki, der damals gerade nach Wien reisen wollte, würde die Papiere dorthin mitnehmen, sie erfuhren jedoch auf ihre Erkundigung, daß dieser Maros-Vásárhely bereits verlassen habe. Daher mußte die Post benutzt werden. Beim Einpacken konnte Wolfgang der Versuchung nicht widerstehen, seine Abhandlung dem Sohne zu zeigen. Dieser las sie und nahm mit einem plötzlichen Entschluß seine eigene Abhandlung wieder an sich, indem er sagte, er bedauere, sie geschrieben zu haben.

Was Johann zu diesem Bedauern veranlaßte, ist schwer zu ergründen. War es die unverkennbare Ähnlichkeit der Arbeiten und das Gefühl, wie viel er dabei seinem Vater verdankte? Oder war es umgekehrt die Entrüstung darüber, daß der Vater Gedanken von ihm benutzt hatte? War es die Empfindung, daß ein solcher öffentlicher Wettkampf zwischen Vater und Sohn unschön sei? Was aber auch der Grund gewesen sein mag, so wurde Johann bald anderen Sinnes. Nachdem er Wolfgang verlassen hatte, ging er zur Post und sandte seine Abhandlung nach Leipzig; seinem Vater machte er davon keine Mitteilung, vielleicht aus einem falschen Gefühl der Scham.

Wolfgang hatte seine Abhandlung zurückbehalten, weil er abwarten wollte, ob Johann seinen Entschluß änderen und sich doch an der Preisbewerbung beteiligen würde. Schließlich kam ihm jedoch das Bedenken, ob er nicht bei längerem Zögern den Termin versäume, weil er unsicher war, was der Ausdruck: die Zeit der Einreichung endet mit dem Monat November bedeute, ob den Anfang oder das Ende des Monats. Er sagte daher seinem Sohne, daß er seine Abhandlung nunmehr

absenden wolle, und fragte ihn, wie es mit der seinigen stehe. Johann antwortete darauf: „Ich schicke sie nun nicht.“

Weil Wolfgang nicht sicher war, ob Alexius Katona in Wien, an den er seine Abhandlung geschickt hatte, diese nach Leipzig weitergegeben habe, wandte er sich an seinen Schüler Peter Bod, der sich in Wien aufhielt In einem Briefe an Bod vom November 1837 beklagt er sich, wie häßlich Johann sich betragen habe: „Als ich neulich zur Post ging, sah ich dort eine Empfangsbestätigung aus Leipzig mit der Unterschrift: Professor Kühn.“

Der peinliche Vorfall, der, eine langjährige Entfremdung zwischen Vater und Sohn nach sich zog, hatte leider noch ein böses Nachspiel. Am 19. März 1838 hatte Wolfgang an seinen Bruder Anton geschrieben und den Klagen über Johanns Verhalten freien Lauf gelassen. Was er über dessen Leben und Treiben berichtet, zeigt jedenfalls, daß Johann in Maros-Vásárhely in schlechtem Rufe stand. Es darf jedoch hier um so eher übergangen werden, als sich jetzt die Wahrheit von Klatsch und Zuträgereien nicht mehr sondern läßt. Wohl aber muß erwähnt werden, was Wolfgang über die gemeinsame Preisbewerbung erzählt. „Seine Abhandlung war schlecht, und obwohl sie rechtzeitig abgesandt wurde, konnte sie natürlich nicht gewinnen. Die meinige ist einen Tag nach dem Termin eingetroffen. Daß er sie nicht einschicke, war eine häßliche Lüge von ihm, und er bereut es auch, geschrieben zu haben, nachdem es so augenscheinlich herausgekommen ist, daß er sie geschickt habe.“

Auf dem Briefe war vermerkt: „Verbrenne ihn!“ Anton hatte das nicht getan, und nach seinem Tode im Jahre 1845 fiel der Brief in Johanns Hände. In fürchterlicher Wut wandte er sich mit folgenden Worten an Wolfgang:

„Als Beilage sende ich Ihnen einen Ihrer Briefe an Anton. Diesen hatte ich, da Sie sowohl in diesem als auch in den übrigen unzähligen [Briefen] meine Ehre zu kränken und zu untergraben trachteten, mit Wissen Gregors aufbewahrt, um mich zu verteidigen. Damit diese Geschmacklosigkeit ein Ende habe, führe ich diese Absicht teils auf diesem Briefumschlag, teils auf einzelnen Blättern aus.“

„Daß ich, der ich, so lange ich in Maros-Vásárhely wohnte, mit den Menschen so wenig in Berührung kam. mich besudelt hätte, ist nicht wahr, und wie weit es für einen Vater passend ist, selbst für den Fall, daß es wahr sei, eine solche Gelegenheit zu ergreifen, um in Wonne dem lieben und geliebten Bruder solches zu schreiben, das zu beurteilen überlasse ich Ihnen. . . .“

„Nun folgt für mich die moralisch allerschwerwiegendste Anklage:

ich hätte häßlich gelogen. Das Wort häßlich ist schon an und für sich unwürdig. ... Ihrer Erziehung und Ihren Grundsätzen viel verdankend ... bildete die unbegrenzte Wahrheitsliebe in Moral und Wissenschaft den Hauptzug meines Charakters. ...“

„Da ich meine Abhandlung in solcher Entrüstung von Ihnen trug, gab ich sie unmittelbar zur Post und bediente mich, nachdem dieses vorgefallen war und Sie mich fragten, ob ich sie abschicken wolle, in meiner Entrüstung einer kleinen Politik. Ich nahm nach dem englischen Rechte das Wort in buchstäblichem Sinne. Da ich dieses bei aller Klarheit als mit der Moral nicht vollständig übereinstimmend erachte, so mache ich davon nur in den allerseltensten Fällen Gebrauch. Abwägend und mit Nachdruck sagte ich: «Ich schicke sie nun nicht!», was auch auf Wahrheit beruhte, da ich sie damals schon abgeschickt hatte. Quod erat demonstrandum!“

Der Sturm der Leidenschaft legte sich und Johann suchte den greisen Vater zu versöhnen, dem er doppelte Bitternis bereitet hatte. Er hoffe sehr, schreibt er, daß sie beide in demselben Maße, wie sie sich früher in vielem widersprochen hätten, betrogen, befangen von irgendeinem hinreißenden Ideal oder Prinzip, sich noch bei Lebzeiten einigen würden, nachdem ihnen alle Schleier von den Augen gefallen und die düsteren Irrgänge sich erleuchtet hätten. ... Aller Mißmut solle ausgesöhnt und ein neues Leben begonnen werden.

Wolfgang war zum Frieden bereit. Es vergingen einige ruhige Jahre, bis zum Schluß ein neuer Zwist entflammte. Doch wir dürfen den späteren Kapiteln nicht vorgreifen und kehren zurück zur Bewerbung um den Preis der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften.

Das Urteil der Gesellschaft wurde im März 1838 verkündet. Es seien drei Abhandlungen eingereicht worden, die die vorgelegte mathematische Frage über die Konstruktion der imaginären Größen behandelten, jedoch habe, zum lebhaften Bedauern der Gesellschaft, keine des Preises würdig geschienen.

„Denn die erste Arbeit, mit dem Motto: *Sigillum veri simplex* (das Einfache ist das Siegel des Wahren) leidet ziemlich stark an Dunkelheit der Sprache, an undeutlicher Erklärung der Begriffe, an unnützer Aufhäufung ungebräuchlicher Zeichen und an dem Mangel einzuerntender Früchte, wofern man nicht etwa den Umstand als Ersatz für eine solche Frucht annehmen will, daß der Verfasser krumme Linien, deren Gleichungen nur aus reellen Größen zusammengesetzt sind, mit schwarzer, solche aber, bei denen imaginäre Formeln auftreten, mit roter Farbe darzustellen empfiehlt.“

„Nicht viel lobenswerter erschien die andere Arbeit mit dem Motto: *Fructus nonnisi maturi decerpendi* (Nur reife Früchte darf man pflücken). Diese ist jener ersten in jeder Beziehung, namentlich auch insofern nicht unähnlich, als sie, wenn auch nicht so arg, doch beinahe in dieselben Fehler verfällt, die wir bei der Beurteilung jener getadelt haben."

„Die Arbeit mit dem Motto: *Auf dem Gebiete der Mathematik* usw. zeichnet sich so aus, daß die Gesellschaft dem Herrn Verfasser die Hälfte des fraglichen Preises zuerkannte, wofern er es nicht vorzieht, seine Abhandlung mit Berücksichtigung der im Programm der Gesellschaft angedeuteten Lücken und Mängel überarbeitet und vermehrt der Gesellschaft vor dem Ende des Monats November 1838 zur Beurteilung wieder vorzulegen. Sie ersucht ihn deshalb, ihr seinen Entschluß schriftlich mitzuteilen."

Der Verfasser der dritten Arbeit war Franz Kerekes (1784—1850), damals Professor am ev. ref. Kollegium zu Debreczin. Seine Abhandlung, die in lateinischer Sprache geschrieben war, ist 1862 von Daniel Csányi als Anhang zu einem nachgelassenen Werke von Kerekes: *Über die wahren Grundprinzipien der höheren Mathematik* herausgegeben worden. Beigegeben ist ein Brief von Kerekes an Kühn, vom 23. November 1838, worin jener mitteilt, daß er die obige Aufforderung der Gesellschaft erst vor acht Tagen erhalten habe und daher den Termin nicht innehalten könne; er sei aber bereit, wenn ihm das erwähnte Programm gesandt werde, die Mängel auszubessern. Hierauf ist, wie Csányi bemerkt, keine Antwort aus Leipzig gekommen.

Wolfgang Bolyais Abhandlung mit dem Kennwort: *Sigillum veri simplex*, die sich dieser später aus Leipzig zurückschicken ließ, hat sich in seinem Nachlaß gefunden; es fehlt nur das Schlußblatt. Was Wolfgang vorbringt, stimmt im Wesentlichen mit den betreffenden Abschnitten des *Tentamens* überein; eine Ausnahme bilden nur die Ausführungen über den Logarithmus, die eine unverkennbare Ähnlichkeit mit der Auffassung haben, die Johann in § 8 der *Responsio* entwickelt. Ohne Zweifel bedeutete Wolfgangs Abhandlung einen Fortschritt, und er befand sich auf dem Wege zu der neueren Lehre von den imaginären Größen. Jedoch hatte er seine Gedanken in so schwer verständlicher Form dargestellt, daß man es der Leipziger Gesellschaft nicht zum Vorwurf machen kann, wenn sie sich ablehnend verhielt. Dazu kam, daß Wolfgang auf das eigentliche Thema, die geometrische Konstruktion der imaginären Größen, nur ganz obenhin eingegangen war.

Johanns Abhandlung, die den Wahlspruch: *Fructus nonnisi maturi decerpendi* trug, hat sich ebenfalls im Nachlaß gefunden; sie wird im zweiten Teile dieses Buches (S. 221—233) in deutscher Übersetzung

wiedergegeben. Auch in dieser Arbeit bezieht sich nur der § 10 und ein Teil des § 11 auf die geometrische Konstruktion der imaginären Größen; die im § 8 gegebene, der Zeit vorauseilende Theorie des Logarithmus und der Potenz kann nicht als Ersatz dafür gelten, und die Ausführungen über die nichteuklidische Geometrie, über die bereits im vorhergehenden Kapitel berichtet worden ist, mußten, so wertvoll sie an und für sich sind, dem uneingeweihten Leser der damaligen Zeit völlig unverständlich sein.

Man wird daher der Gesellschaft aus dem ungünstigen Urteil über Johanns Abhandlung, das sie zu ihrem lebhaften Bedauern fällen mußte, keinen Vorwurf machen können. Für Johann war freilich der neue Mißerfolg eine überaus schmerzliche Enttäuschung, die seine schon geschwächte Kraft auf Jahre hinaus gebrochen hat.

„Schade, das dieser große Schatz in unwürdige Hände fiel," schreibt Johann in einer Aufzeichnung, die er der Abhandlung beigelegt hat. „Die Gesellschaft hat nach ihren Kräften ihre Pflicht und Schuldigkeit getan; nun ist die Reihe an mir, die Gesellschaft zu richten. Zu verteidigen ist da nichts, wo der Gegner weder etwas speziell kritisiert noch mit Grund für unwichtig oder von ihm unverstanden erklärt, sondern nur mit einem tötlichen Machtspruch allgemein das Ganze für nichtswürdig und unverständig erklärt. Ein so selten gehörtes Urteil ziemte nur für eine Arbeit, worin nichts Gutes und Verständliches gefunden würde; allein von mir so etwas zu behaupten, der sich in noch schwierigeren, verborgeneren Dingen die Zufriedenheit und besondere Hochachtung eines Gauss (gegen den Koloss ihr nur Zwerge seid!) zu erlangen Gelegenheit hatte, ist in der Tat dreist, und ich kann mich nicht genug darüber wundern, wie sich die Gesellschaft unterstand — und nicht vielmehr die Notwendigkeit fühlte, wiederholt zu untersuchen, bevor sie es wagte, ein so entscheidendes Urteil zu fällen — denn dies gereicht ihr zur ewigen Schande."

Gewiß, Johanns Theorie der imaginären Größen war „ein großer Schatz", der allerdings erst ausgemünzt werden mußte, ehe er verwertet werden konnte, sie war ein bedeutsamer Schritt von dem Standpunkt, den Gauss eingenommen hatte, nach der Richtung der neueren Lehre von den komplexen Größen. Allein, was wir jetzt deutlich und klar vor Augen sehen, war für Johann noch in Dunst und Nebel gehüllt. Er hat in genialer Intuition die Lösung des Problems geahnt, allein er ist nicht imstande gewesen, eine durchgebildete, allgemein verständliche Darstellung zu geben.

Es erging ihm in dieser Beziehung wie seinem Vater, der, wie wir im V. und VI. Kapitel gesehen haben, an manchen Stellen des *Tentamens*

Fragestellungen der modernen Mathematik ganz nahe gekommen ist, ohne sie jedoch ergreifen und festhalten zu können.

Ebenso wie Wolfgang die beiden Zweige der Mathematik, Arithmetik und Geometrie, im Gegensatz zu der bis weit ins neunzehnte Jahrhundert hinein üblichen Vermischung, jede für sich selbständig aufzubauen versucht hatte, macht auch Johann (in § 11) gegen die Gaußsche Theorie der imaginären Größen das Bedenken geltend, daß die dabei verwendeten Begriffe von *links* und *rechts*, *oben* und *unten* nicht bestimmt genug seien, und daß überhaupt bei arithmetischen Betrachtungen die Einmischung geometrischer Begriffe vermieden werden müsse.

Von besonderer Wichtigkeit für Johanns Untersuchungen ist aber die Theorie der negativen Größen geworden, die Wolfgang im *Tentamen* angedeutet hatte. Johann ist es gelungen, den Gedanken seines Vaters mit einer Klarheit und Schärfe zum Ausdruck zu bringen, zu der dieser selbst sich niemals durchgerungen hatte. Es handelt sich um die grundlegende Erkenntnis, daß die negativen Größen erst dann einen Sinn gewinnen, wenn man sich entschließt, den betrachteten Dingen zwei „Determinationen" beizulegen, das heißt, wenn man neben der ursprünglichen Einheit „$+1$" eine neue Einheit „-1" einführt. Durchdrungen von der Bedeutsamkeit seiner Auffassung hatte Wolfgang außer den Zeichen des Hinzutuns und Wegnehmens „$+$" und „$-$" für die positive und negative Einheit zwei besondere Zeichen „$\dashv\vdash 1$" und „$\vdash\!\dashv 1$" eingeführt. Für die Begründung der Lehre von den negativen Größen mag dies seinen Nutzen haben, allein es empfiehlt sich, diese Fesseln bald wieder abzustreifen; sonst wird die Darstellung, werden die Formeln und Rechnungen unnötig lang und schwerfällig.

Aus der naturgemäßen Weiterentwicklung von Wolfgangs Theorie der negativen Größen ist Johanns Theorie der imaginären Größen hervorgegangen; der Vater hat auch hier „dem Sohne vorangeleuchtet". Johann führt sogleich vier Einheiten ein: $\dashv\vdash 1$, $\vdash\!\dashv 1$, $\dashv\vdash 1$, $\multimap 1$; die beiden ersten nennt er reell und entgegengesetzt, die beiden letzten imaginär und entgegengesetzt und entwickelt nun sorgfältig und ausführlich die Regeln, nach denen mit diesen vierteiligen Größen gerechnet wird; wie er ausdrücklich darlegt, lassen sich diese Größen auch auf die reduzierte Form $a + \sqrt{-1} \cdot b$ bringen, wo a und b positive oder negative reelle Größen bedeuten. Freilich hat er sich seine Aufgabe erheblich erschwert, indem er, ganz dem Gedankengange seines Vaters folgend, neben den Zeichen für die Einheiten: $\dashv\vdash 1$, $\vdash\!\dashv 1$, $\dashv\vdash 1$, $\multimap 1$ noch die entsprechenden Zeichen für die Operationen: $+$, $-$, $\dashv\vdash$, $\multimap$ einführt. Das ist jedoch nur ein äußerlicher Mangel, der nicht hindern

kann, den wesentlichen Fortschritt anzuerkennen, den Johanns Theorie der imaginären Größen für die damalige Zeit bedeutete.

Dies gilt allerdings nur mit einer Einschränkung. In demselben Jahre, in dem Johann seine Abhandlung nach Leipzig sandte, ist Hamiltons *Theory of conjugate functions or algebraic couples* erschienen, die dieser bereits vier Jahre vorher der Akademie in Dublin vorgelegt hatte, und hierin war, wie schon der Titel andeutet, die Auffassung der gewöhnlichen komplexen Zahlen als Paare reeller Größen in voller Klarheit ausgesprochen und durchgeführt worden. In weiteren Kreisen sind Hamiltons Gedanken erst durch die Vorrede zu seinen *Lectures on quaternions* (1853) bekannt geworden; die Arbeit vom Jahre 1837, die seiner Zeit keine Beachtung fand, wurde erst neuerdings durch Study ans Licht gezogen. Aus ihr möge hier die folgende Stelle wiedergegeben werden, die den Kern der Theorie Hamiltons enthält:

„In der Theorie von einzelnen Zahlen ist das Zeichen $\sqrt{-1}$ absurd und bedeutet eine unmögliche Wurzelausziehung oder lediglich eine imaginäre Zahl. Aber in der Theorie der Zahlenpaare hat dasselbe Zeichen einen Sinn und bedeutet eine mögliche Wurzelausziehung oder ein reelles Paar, nämlich den Hauptwert der Quadratwurzel des Paares $(-1, 0)$. In dieser Theorie also, jedoch nicht in jener, darf das Zeichen $\sqrt{-1}$ mit vollem Rechte gebraucht werden, und wir dürfen, wenn wir es vorziehen, für jedes beliebige Paar (a_1, a_2) schreiben:

$$(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1},$$

indem wir in dem Ausdruck $a_1 + a_2\sqrt{-1}$ die Zeichen a_1 und a_2 als Symbole für die Hauptpaare $(a_1, 0)$, $(a_2, 0)$ auffassen und, in demselben Ausdruck, $\sqrt{-1}$ als Symbol für die zweite Einheit oder das zweite reine Paar $(0, 1)$."

Unzweifelhaft besitzt Hamiltons Abhandlung erhebliche Vorzüge vor der Johanns. Seine Darstellung ist bei weitem klarer, er sieht auch schon weiter, er weiß, daß man eine entsprechende Theorie für Größen mit mehr als zwei oder, wenn man die negativ genommenen Einheiten besonders zählen will, mit mehr als vier Einheiten aufstellen kann. Johann behauptet zwar, daß man genau seine vier Einheiten einführen müsse, nicht mehr und nicht weniger, allein er bleibt den Beweis dafür schuldig. In seinem Nachlaß hat sich allerdings ein Blatt gefunden, das beweist, daß er der Frage näher getreten war. Auf der Rückseite eines Zettels mit einer militärischen Meldung vom März 1830 versucht er nämlich bei einem System von sechs Einheiten die Multiplikation zu erklären, und probiert, was herauskommt, wenn man das Produkt von je zwei Einheiten wieder gleich einer Einheit setzt. Er

bemerkt dazu, wenn man ein solches System mit sechs Einheiten betrachte, „so hörten die schönsten Schlußfolgen auf, obwohl es keine Ungereimtheit enthielte“. Was damit gemeint ist, zeigt eine andere Eintragung: „Auch hätte alsdann die Quadratwurzel mehr als zwei Werte.“

Während ferner Johann die Regeln für die Multiplikation komplexer Größen ohne jede Begründung, sozusagen durch einen Machtspruch einführt, gibt Hamilton auf Grund des distributiven Gesetzes die allgemeinste Formel der Multiplikation; es empfehle sich jedoch, meint er, die darin auftretenden Konstanten so zu wählen, daß man auf die gewöhnlichen komplexen Zahlen komme. Zu Gunsten von Johann ist jedoch geltend zu machen, daß dieser sich vollkommen klar darüber war, daß die Regeln des Rechnens mit komplexen Größen erst definiert werden müssen und es hier, ebenso wie bei den negativen Zahlen, nicht ohne Weiteres erlaubt ist, die für die gewöhnlichen Zahlen geltenden Rechnungsregeln auf die neuen Zahlen zu übertragen. Diese richtige Erkenntnis zeigt sich besonders in dem Umstande, daß Johann gegen Gaussens Deduktion, die ganzen komplexen Zahlen müßten durch die Punkte eines *quadratischen* Gitters in der Ebene dargestellt werden, mit Recht den Einwand erhebt, Gauss dehne hierbei den Begriff der Proportion, der zunächst nur für reelle Größen gelte, in unzulässiger Weise auf imaginäre Größen aus.

Wenn Johann auch nicht die Kraft besaß, seine Gedanken abzuklären und auszugestalten, wenn es ihm leider auch nicht beschieden war, die vielversprechenden Früchte seiner Jugend reifen zu lassen, so sind seine Leistungen für die Lehre von den imaginären Größen doch des Verfassers des *Appendix* würdig und sichern ihm für immer einen Platz in der Geschichte dieser Theorie.

XV. Kapitel

Johann Bolyai und N. I. Lobatschefskij

Erster Teil: Wie Johann die Geometrischen Untersuchungen Lobatschefskijs kennen lernte

Bekanntlich haben Lobatschefskijs Schriften über die nichteuklidische Geometrie die verdiente Anerkennung erst gefunden, nachdem im Jahre 1863 im fünften Bande des Briefwechsels Gauss-Schumacher ein Brief Gaussens vom 28. November 1846 veröffentlicht worden war, in dem der Princeps mathematicorum die *Geometrischen Untersuchungen* vom Jahre 1840 als das meisterhafte Werk eines echten Geometers bezeichnet hatte. Es verdient jedoch bemerkt zu werden, daß schon im Jahre 1851 von anderer Seite auf Lobatschefskij hingewiesen worden war, freilich ohne Erfolg, nämlich von Wolfgang Bolyai, der in seinem *Kurzen Grundriß eines Versuches* (zweiter Teil dieses Buches, S. 149—152) auf die *Geometrischen Untersuchungen* eingeht und ihre wunderbare Übereinstimmung mit dem 1832 veröffentlichten *Appendix* seines Sohnes Johann hervorhebt; „beiden", sagt er, „ist, da keiner den anderen gesehen hat, dasselbe Original der Wahrheit nach Jahrtausenden erschienen."

Der Briefwechsel Gauss-Bolyai zeigt, daß Bolyai durch Gauss von jener Schrift Lobatschefskijs Kenntnis erhalten hatte. Am 18. Januar 1848 fragt Wolfgang bei seinem Jugendfreunde an, was der Titel des russischen mathematischen Werkes sei, welches viel Ähnlichkeit mit dem seinigen habe, und Gauss antwortet am 20. April 1848: „Die Arbeiten des russischen Geometers stehen größtenteils in den russischen Denkschriften der Universität Kasan. Ich vermute aber, daß Du leichter erhalten kannst die kleine treffliche Schrift: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien von Nicolaus Lobatschewsky. Berlin 1840 in der Finckeschen Buchhandlung."

Hiermit ist jedoch nur ein Teil des Rätsels gelöst, es fragt sich noch, was Wolfgang veranlaßt hatte, sich bei Gauss nach dem russischen mathematischen Werke zu erkundigen. Einen Anhalt hierfür gibt ein Brief, den er am 10. September 1844 an seinen Sohn Johann in Domáld gerichtet hat und von dem ein schlecht erhaltenes Konzept in der Bibliothek des ev. ref. Kollegiums zu Maros-Vásárhely vorhanden ist. Wolfgang schreibt: „In der Zeitung (dem Unterhaltungsblatt) erschien

Mentovichs Unterredung mit Gauss. Gauss habe die Arbeit eines (ungenannten) russischen Mathematikers, die er unter den Büchern in der Nähe des Tisches neben dem meinigen hatte, mit der Äußerung gezeigt, daß sie bis auf [unleserliche Worte] ähnlich ist dem Werke der Bolyai, obwohl es keiner von dem anderen nehmen konnte."

Der Zeitungsartikel, von dem Wolfgang spricht, hat den Titel „*Tagebuch-Fragmente*" und befindet sich in der am 30. August 1844 erschienenen Nummer des Klausenburger Journals *Nemzeti Társalkodó* (Nationales Unterhaltungsblatt).

Franz Mentovich (1819—1879) hatte in Nagyenyed, Wien und Berlin Mathematik und Physik studiert. Auf der Heimreise kam er Ende August 1843 nach Göttingen, wo er Gauss besuchte. Später ist er in Nagykörös, seit 1856 als zweiter Nachfolger Wolfgang Bolyais in Maros-Vásárhely Professor der Mathematik und Physik gewesen. Die Aufzeichnungen über seine Unterredung mit Gauss hatte er sogleich am 1. September 1843 in sein Tagebuch eingetragen, sie können daher auf Glaubwürdigkeit Anspruch machen.

Mentovich äußert sich nach einer längeren Einleitung folgendermaßen: „Als ich ihm (Gauss) mitgeteilt hatte, daß ich ein Siebenbürger sei, fragte er sogleich mit Interesse, ob ich über seinen siebenbürgischen Freund, Professor Bolyai, nicht neuere Nachrichten habe, als mein siebenbürgischer Landsmann, Professor Szász, der ihn einige Zeit vor mir besucht hatte. Hierauf antwortete ich, daß ich ihm nur mit noch älteren Nachrichten dienen könne, indem ich bereits vor drittehalb Jahren meine Heimat verlassen hätte. Und obwohl diese meine Antwort durchaus nicht zur Fortsetzuug des Gespräches über den begonnenen Gegenstand geeignet war, wurde damit die Unterhaltung über unseren Bolyai bei weitem nicht abgebrochen; es war ersichtlich, daß Gauss an einem Lieblingsgegenstande festhielt, den man im Gespräche nicht leicht verläßt. 'Wie mag wohl mein Freund gleich mir grau und alt geworden sein! Es wäre mir fürwahr keine geringe Freude, wenn ich noch einmal mit ihm zusammentreffen könnte; denn im späteren Alter, wenn unsere guten Freunde und Bekannten allmählich wegsterben, hängen wir mit gesteigerter Innigkeit an unseren wenigen übriggebliebenen Lieben'. So seufzte der Gelehrte, und es war eine kurze Zeit seinem ganzen Äußeren ein Nachsinnen über die gemeinsam verlebten Tage der Jugendzeit anzusehen. Bald wieder heiterer geworden, erhob er sich von seinem Sitze und zog ein noch ganz neu aussehendes Buch hervor, von dem er sagte, daß er es vor einiger Zeit von einem russischen Mathematiker erhalten habe und daß es ihn darum interessiere, weil es in Betreff der darin enthaltenen Ideen genau mit den selb-

ständigen mathematischen Ideen der Bolyai übereinstimme; gleichwohl sei er überzeugt, daß sie nicht das Geringste voneinander wissen und ihre Ideen austauschen konnten, weil die Gegenden, in denen sie wohnen, so weit voneinander gelegen sind. 'Diese Arbeit,' fuhr er fort, 'verdient beachtet zu werden und für einen Ungarn muß sie wegen der wunderbaren Verwandtschaft der Ansichten doppelt interessant und leicht zugänglich sein, da sie in russischer Sprache geschrieben ist.' Aus dieser Äußerung ersieht man, daß auch Gauss, obwohl er einen ungarischen Freund hat, dennoch die sehr falsche Ansicht hegt, die übrigens bei den deutschen Gelehrten, die keine Philologen sind, allgemein verbreitet ist, die magyarische Sprache sei, wie die polnische, slowakische, böhmische usw., ein verwandter Zweig des slavischen Sprachstammes. . . ."

„Das mathematische Werk unseres Bolyai erblickte ich in der kleinen Bibliothek neben Gaussens Arbeitstisch, wo allem Anschein nach nur von bevorzugteren Schriftstellern verfaßte und mehr als Handbücher gebrauchte Werke standen. Aus jedem Worte dieses vortrefflichen Mannes war ersichtlich, daß er unseren Bolyai nicht nur als seinen Freund verehrt, sondern auch seine wissenschaftlichen Verdienste hochschätzt. Als ich Abschied nahm, trug er mir auf, in seinem Namen seinen alten Freund zu grüßen und ihm zu sagen, daß es ihn sehr freuen würde, wenn er über sein Befinden durch einen Brief von ihm selbst das Neueste und Sicherste erführe. Dies zu tun versprach ich."

Wie ist es aber gekommen, wird man jetzt fragen, daß Wolfgang Bolyai sich erst mehr als drei Jahre später, im Januar 1848, bei Gauss nach dem Titel des russischen mathematischen Werkes erkundigt hat? Wahrscheinlich hat er es zunächst für überflüssig gehalten, sich ein Werk zu verschaffen, das in einer Sprache geschrieben war, die nicht nur ihm selbst, sondern wohl auch allen, an die er sich wenden konnte, unverständlich war. Daß er darauf zurückgekommen ist, hat wohl Johann veranlaßt. In Johanns Nachlaß befinden sich umfangreiche *„Bemerkungen über Nicolaus Lobatschefskijs Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien"*, über deren Inhalt noch genauer zu berichten sein wird. Am Schluß erzählt Johann, was ihn dazu veranlaßt habe, Lobatschefskijs Werk zu kritisieren. „Gauss," sagt er, „hat zwar meine alte Arbeit wiederholt gelobt, wenn auch nur mit ausweichenden Worten, wie unter anderem mit dem Ausdrucke seiner Überraschung. Dennoch ist es nach der Äußerung eines ausgezeichneten Landsmannes, der Ihn später besuchte, geschehen, daß der bis dahin ruhige und an der Unterhaltung nur gleichgültig teilnehmende Koloß, als mein Landsmann anfing von den Parallelen zu sprechen, auf einmal mit erheitertem Gesicht und mit feuriger Begeisterung in das Lob von

Lobatschefskijs Werk ausbrach als einer gediegenen und mit Seinen Ansichten übereinstimmenden Arbeit, hingegen Sich des *Appendix* mit Unrecht und zu seiner Schande garnicht erinnern wollte, obwohl Er doch früher seine Verwunderung über die sonderbare Übereinstimmung beider Werke ausgesprochen hatte. Nun habe ich aber bewiesen, daß Lobatschefskij, wenn er auch besonders von § 35 an, bei der Ableitung der antieuklidischen ebenen Trigonometrie, sich als ein wahrhaft originaler, klassischer Autor zeigt und auf den ersten Blick dem Ziele sehr nahe zu kommen scheint, dennoch sehr weit von dem Resultate des *Appendix* und des *Additamentums* am Ende des zweiten Bandes des *Tentamens* entfernt war."

Den Namen des „ausgezeichneten Landsmanns" mit Sicherheit festzustellen, ist leider nicht gelungen, wenn es auch nahe liegt zu vermuten, daß es sich um Karl Szász handelt. Wer es aber auch gewesen sein mag, so liegt sicherlich ein Mißverständnis vor, denn die Briefe von Gauss an Schumacher und Gerling aus den Jahren 1848 und 1849 zeigen, daß dieser nicht aufgehört hatte, herzlichen Anteil an allem zu nehmen, was seinen Jugendfreund betraf. Daß aber Johann, für den schon Gaussens Brief vom 6. März 1832 eine große, niemals verwundene Enttäuschung gewesen war, sich durch die angebliche Äußerung von Gauss aufs heftigste gekränkt fühlte, ist in Anbetracht seines unglückseligen, reizbaren und mißtrauischen Wesens nur zu begreiflich.

Gewaltige Stürme müssen damals Johanns leidenschaftliche Seele durchtobt haben. Daß der *Appendix* nicht die Anerkennung gefunden hatte, auf die er hoffte und zu hoffen berechtigt war, das war bitter; allein er hatte sich allmählich darein ergeben, vielleicht getröstet durch das Beispiel seines Vaters, dessen *Tentamen* dasselbe Schicksal hatte. Daß aber ein anderer die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie für sich in Anspruch nehmen und ihn so des Ruhmes berauben wollte, den er von der gerechteren Nachwelt erwartete, das war ein unerträglicher Gedanke. Den Gipfel des ihm angetanen Unbills erblickte er jedoch in dem Verhalten von Gauss, der, wie er wähnte, sich nicht nur auf die Seite des Nebenbuhlers stellte, sondern sogar die spärliche Anerkennung des *Appendix* wieder rückgängig machen wollte. Wie war das zu erklären? Nur dadurch, meint Johann, daß Gauss, erfüllt von Mißgunst und Neid, ihm den Ruhm der Entdeckung der absoluten Geometrie nicht gönnte und, da er selbst „das Geschrei der Böoter scheute", den russischen Geometer vorschob, dem er Johanns Ideen heimlich mitgeteilt hatte. Sein überreiztes Hirn spinnt diese Gedanken immer weiter aus. Mit vieler Spitzfindigkeit sucht er zu beweisen, daß der Verfasser der *Geometrische Untersuchungen* den *Appendix* gekannt haben müsse

und letzten Endes nur Gauss selbst gewesen sein könne. Das schnöde Unrecht, das ihm zugefügt worden war, heischt Rache. Aber es soll eine edle Rache sein, würdig des Mannes, der bei all' seinem Streben und Trachten nur das „Allheil" der Menschheit im Auge hat. Er will sich aufraffen aus dem unfruchtbaren Leben, in das er seit Jahren versunken war, und der Welt zeigen, was er zu leisten vermag. Große Werke will er schaffen, die sich denen des Kolosses in Göttingen ebenbürtig an die Seite stellen, und dann soll dieser erkennen, wie schwer er sich gegen den Sohn seines Jugendfreundes versündigt hat!

So beginnt denn mit dem 17. Oktober 1848, dem Tage, an dem Johann, wie er sich angemerkt hat, von seinem Vater die *Geometrischen Untersuchungen* von N. J. Lobatschefskij erhalten hat, ein neuer Abschnitt in seinem Leben, eine Zeit rastloser, fast fieberhafter Arbeit, die er unermüdlich fortführte, bis schließlich schwere Krankheit ihm die Feder aus der Hand nahm. Ein trauriges Schauspiel. Von dem Ehrgeiz beseelt, es einem Gauss gleich zu tun, wagt sich Johann an die schwierigsten und höchsten Probleme der Mathematik. Aber diese stoßen unbarmherzig die Verwegenen zurück, die zu ihrer Lösung nicht berufen sind, und Johann gehörte nicht mehr zu den Berufenen. Er hatte die ihm bestimmte Aufgabe erfüllt. Jetzt war seine Schaffenskraft gebrochen, und als er die Raumlehre und die Theorie der imaginären Größen wieder vornahm, vermochte er selbst auf diesen Gebieten die kernige Kürze und Ursprünglichkeit seiner alten Schriften nicht wieder zu erreichen; was er gab, war eine weitschweifige Ausspinnung früherer Gedanken, die es zu keinem Abschluß der geplanten Werke kommen ließ.

Die erste Arbeit, an die Johann ging, war eine ausführliche Kritik der *Geometrischen Untersuchungen* von N. J. Lobatschefskij. Während Johann sich für Aufzeichnungen mathematischen Inhalts sonst fast ausschließlich der deutschen oder lateinischen Sprache bediente, hat er hier seine Muttersprache gewählt, vielleicht, weil seine Äußerungen, wie er bemerkt, nicht für die Öffentlichkeit bestimmt waren. Es schien daher richtig, von einem vollständigen Abdruck der *Bemerkungen über Nicolaus Lobatschefskijs Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* abzusehen und aus den Abschnitten, die einen persönlichen Charakter tragen, nur das mitzuteilen, was geschichtlichen Wert besitzt. Aber auch bei den mathematischen Abschnitten waren Kürzungen geboten, weil die Darstellung Johanns sehr breit und reich an Wiederholungen ist. Die mitgeteilten Stücke sind durch kurze Berichte über die weggelassenen Stellen in der Weise verbunden worden, daß der Leser eine Vorstellung von dem Gedankengang des Ganzen erhält. Zugrunde gelegt wurde dabei ein umfangreicher Entwurf, der sich durch saubere

Schrift als Ausarbeitung verschiedener Vorarbeiten erweist, von denen ebenfalls Stücke im Nachlaß vorhanden sind. Dieser Entwurf stammt aus der Zeit um Neujahr 1851, denn es wird darin erwähnt, daß Wolfgang Bolyai, der am 9. Februar 1775 geboren war, fast 76 Jahre alt sei. Die Entzifferung der Aufzeichnungen, die J. Kürschák zu verdanken ist, war eine mühsame Arbeit, weil Johann sich einer eigenartigen Schrift bedient, nämlich einer der magyarischen Sprache angepaßten Abänderung des lateinischen Alphabets, die sein Vater erfunden hatte (*Arithmetica eleje kezdőknek*, Maros-Vásárhely 1830). Dazu kommt, daß er häufig ganz ungewöhnliche, von ihm oder seinem Vater erfundene Worte gebraucht; dies steht in Zusammenhang mit den Bestrebungen Johanns, auf Grund der magyarischen Sprache eine Weltsprache zu schaffen, auf die wir im XIX. Kapitel zurückkommen werden.

Es möge noch ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß zum Verständnis der *Bemerkungen* die Kenntnis des *Appendix* unerläßlich, die Bekanntschaft mit den *Geometrischen Untersuchungen* erwünscht ist. Endlich sei noch bemerkt, daß Lobatschefskij von Johann Bolyais *Appendix* niemals etwas erfahren zu haben scheint; sonst würde er wohl in der 1856 erschienenen *Pangeométrie* auf das merkwürdige Zusammentreffen mit dem ungarischen Mathematiker hingewiesen haben.

XVI. Kapitel

Johann Bolyai und N. I. Lobatschefskij

Zweiter Teil: Johann Bolyais Bemerkungen zu Nicolaus Lobatschefskijs Geometrischen Untersuchungen über die Theorie der Parallellinien

„Wenn auch in diesem merkwürdigen Werke vielfach andere Wege eingeschlagen sind", so beginnt Johann seine *Bemerkungen über Nicolaus Lobatschefskijs Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, „so gleicht doch der Geist und das Resultat so sehr dem *Appendix* des im Jahre 1832 zu Maros-Vásárhely erschienen *Tentamen matheseos*, daß man es nicht ohne Verwunderung erblicken kann. War Gauss nach seiner Äußerung zuerst durch den *Appendix* und neuerdings durch das merkwürdige Zusammentreffen des magyarischen und moskowitischen Mathematikers auf das Äußerste überrascht: Fürwahr, ich bin es nicht minder."

„Das Wesen der reinen Wahrheit kann zwar in Maros-Vásárhely wie in Kamschatka und auf dem Monde, kurz auf der ganzen Welt, nur ein und dasselbe sein: und was ein endliches, vernünftiges Wesen erfindet, das kann auch einem anderen zu erfinden nicht unmöglich sein. Auch pflegt für Geistesprodukte wie für Naturprodukte — je nach der Entwickelungsstufe der Menschheit — gewissermaßen ihre Zeit zu kommen; sodaß mitunter auf dem Festlande und in dem Meere derselbe Gegenstand zu gleicher Zeit untersucht wird und verwandte Ideen erwachen, wie das z. B. im Falle der Differential- und Integralrechnung geschehen ist. Endlich ist dieser Gegenstand an sich gar nicht besonders schwierig und verborgen. Wenn man jedoch bedenkt, wie wenige scharf denkende Mathematiker, selbst unter den besseren, Sinn dafür hatten, dieser Lücke gewahr zu werden und nach ihrer Ausfüllung zu streben, und daß seit Euklides oder gar seit dem Dasein der Menschheit trotz vieler schönen, geistreichen Untersuchungen — unter denen, was Strenge, Klarheit und Tiefe betrifft, unstreitig die einschlägigen, unmittelbar dem *Appendix* vorausgehenden Untersuchungen des *Tentamens* den ersten Platz verdienen — in dieser Sache wenigstens öffentlich beinahe garnichts geschehen ist, und daß der übrigens tüchtige Ettingshausen nicht einmal den Wert des fertigen *Appendix* begreifen konnte: dann kann man

es kaum für wahrscheinlich halten, daß zwei oder gar drei Leute, voneinander nichts wissend, fast zu derselben Zeit, wenn auch auf verschiedenen Wegen die Sache beinahe vollständig erledigt haben sollen."

„Nach diesen Überlegungen halte ich den Verdacht nicht für unbegründet — obwohl ich nur ungern diese nicht für die Öffentlichkeit bestimmte private Äußerung tue — das Littrow, als Ehrenmitglied der Kasaner Universität oder vielleicht gar ihr ehemaliger Professor Matheseos, mit Lobatschefskij in Verbindung sein konnte und ihm das *Tentamen*, das mein Vater an Ettingshausen in Wien gesandt hatte, überlieferte, und Lobatschefskij, der als unstreitig geistreicher Mann dessen Ziel und Wert erkannte, auch in anderer Weise das Ziel zu erreichen suchte. Für noch wahrscheinlicher aber halte ich, daß der ohnedem an Schätzen so reiche Koloß Gauss es nicht ertragen konnte, daß ihm jemand auch in dieser Sache zuvorgekommen sei, und, da er dies durchaus nicht mehr verhindern konnte, das Werk selbst bearbeitet hat und es unter Lobatschefskijs Namen hat herausgeben lassen".

Nachdem Johann diese Annahme ausführlich begründet und Gaussens Verhalten ihm gegenüber verurteilt hat, bemerkt er, daß dem *Appendix* die Priorität zukomme, wenn nicht etwa Lobatschefskij schon 1829 in seiner Abhandlung im Kasanschen Boten dieselben Lehren vorgetragen habe. Freilich habe er selber schon im Jahre 1823 das Wesentliche der Sache gefunden, nämlich den Satz des § 29 des *Appendix*, und im Jahre 1826 seinem damaligen Vorgesetzten und früheren Lehrer an der Genieakademie, dem Geniehauptmann Wolter, einen Entwurf seiner Raumlehre vorgelegt. Von Einfluß auf die Entwickelung seiner Ideen sei auch sein Verkehr mit Karl Szász während des Aufenthalts auf der Ingenieur-Akademie gewesen; viel verdanke er endlich dem Vater, der seinem Leben die „mit unerschütterlicher Treue eingehaltene Hauptrichtung" gegeben habe.

Nach dieser ausführlichen Einleitung wendet sich Johann zu der Besprechung der *Geometrischen Untersuchungen*, indem er von § 16 an den Inhalt der weiteren Paragraphen teils wortgetreu, teils mit kleinen Änderungen wiedergibt und seine Bemerkungen daran knüpft.

Bei § 22 heißt es: „Es sei bemerkt, daß der Name *Imaginäre Geometrie* so wenig angemessen und zweckmäßig ist, wie jener der *Imaginären Größen*; denn beide Geometrien sind gleich denkbar, und es bleibt ewig unentscheidbar, welche von beiden eigentlich im *Realen* oder *objektiv* besteht."

Hinter § 25, mit dem die Lehre von den Parallellinien (die Johann Asymptoten nennt) abgeschlossen wird, setzt Johann auseinander, wie

er in seinem geplanten *Vollständigen Systeme der Raumlehre* diesen Gegenstand vorzutragen gedenke.

„Vorerst § 1 des *Appendix* in drei Teile getrennt, deren erster die Erklärung der Asymptoten enthält."

„§ 1. *Wenn* $bn \parallel am$ *und* c *wo immer in* $\widetilde{ma}$ *angenommen wird, so ist* $bn \parallel cm$. Auf das Genaueste bewiesen.

Im § 2 kann dann folgen: *Wenn* $bn \parallel am$, *und* c *wo immer in* $\widetilde{bn}$ *angenommen wird, so ist* $cn \parallel am$.

Oder aber dies:

Wenn $bn \parallel am$, *und* c, δ *in* $a\widetilde{m}$ *liegen,* $c\delta = cb$ *und* $ac \backsim \infty$, *so folgt hieraus* $acb \backsim 0$.

Dann:

§ 3. *Wenn* $bn \parallel am$, *so ist auch* $am \parallel bn$."

Johann will für diesen Satz den Beweis von Lobatschesfkij benützen und dann die bisherigen Resultate in den Satz § 6 des *Appendix* zusammen fassen. Dann könne folgen:

„*Wenn* $bn \parallel am$ *und* $cp \parallel am$, *so ist* $bn \parallel cp$ [*und* $cp \parallel bn$].

Oder es wird vorausgeschickt:

Ist bn am, *und liegt* c *nicht in* $\widetilde{bam}$, *so ist der Schnitt von* mac *und* $nbc \parallel$ *zu* am *und zu* bn.

Und dann erst folgt

I. Fall, wenn c nicht in $\widetilde{bam}$ liegt,

II. Fall, wenn c darin liegt.

Dann:

§. *Ist* $bn \parallel \triangleq am$, c *die Mitte von* ab, *und in* bam $cp \perp ab$, *so ist* $am \parallel cp \parallel bn$.

Zu jedem am *gibt es immer ein* bn, *das* $\parallel \triangleq am$ *ist.*

Dies kurz in folgender Weise:

Ist $cp \perp de$, *in* de $c\delta = ce$ *und* δq $cp \parallel er$, *so hat man offenbar* $\delta q \parallel \triangleq er$.

§. *Ist* $bn \parallel am$, $\widetilde{map} \perp \widetilde{mab}$, c *in* $bam\widetilde{p}$, *das heißt auf derselben Seite von* $\widetilde{bam}$ *wie* p, *und bilden die Ebenen* bcn *und* nba *einen Raumwinkel* $cbna$, *der* $< R$ *ist, so schneiden sich* map *und* nbc."

Eine scharfe Kritik übt Johann an § 27 der *Geometrischen Untersuchungen*. Wir geben zunächst seine Ausführungen wieder, werden ihnen aber einige Bemerkungen hinzufügen, da Johann über das Ziel hinausschießt und seine Behauptung, Lobatschefskij habe „einen groben Fehler begangen", nicht berechtigt ist.

„Am Anfange des § 27 vergleicht [Lobatschefskij] die Seiten des sphärischen Dreiecks mit π und sagt, sie seien $< \pi$. Daraus folgt, daß

er unter π eine mit den Seiten *gleichartige* Größe versteht, also entweder eine *Länge*, oder aber ein bloßes *Verhältnis*, eine *abstrakte Größe*, um nicht zu sagen *Zahl*, da dieser Name auf die Irrationalen nicht anwendbar ist, ja sogar für Brüche unzweckmäßig erscheint, und am besten nur für *ganze* Größen benutzt wird. Daß er nun π im *letzteren* Sinne, d. h. als bloßes Verhältnis, benutzt, das ist aus der Mitte der Seite 28 ersichtlich, wo er von den dortigen sphärischen Dreiecken behauptet, sie seien zusammen gleich π. Er denkt also notwendigerweise an Verhältnisse, denn Längen und Flächen können nur in diesem Sinne gleichartig sein. Ja! Aber sobald man eine konkrete Größe wie ein Verhältnis behandelt, so muß man für sie ein Hauptmaß bestimmen, durch das sie ausgemessen werden soll. Dann kann man freilich Flächen etwa mit Rauminhalten in der Rechnung vergleichen. Soll aber zum Beispiel der Flächeninhalt des Parallelogrammes auf F gleich dem Produkt der Seiten genommen werden können, so muß man zur Flächeneinheit jenes Quadrat nehmen, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist. Da der Verfasser über dieses alles zu sprechen verabsäumt hat, so sieht man, daß er π mit 2 R verwechselt und von beiden keinen klaren Begriff gibt. Aus seiner Betrachtung folgt aber nur so viel: Versteht man unter einem von zwei halben Hauptkreisen bestimmten zweizipfligen Winkel den kleineren der von beiden eingeschlossenen Kugelsektoren, so ist der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks gleich der Hälfte der um die Oberfläche der Halbkugel verminderten Winkelsumme. Von Zahlen oder Verhältnissen ist hier keine Rede."

Johann meint aber, es sei „einfacher und einzig richtig" unter dem Winkel, der von zwei Geraden oder mehreren durch einen Punkt gehenden Ebenen gebildet wird, den von diesen begrenzten Teil der Ebene oder des Raumes zu verstehen. „Dann kann bewiesen werden, daß auf der Kugel und in der Ebene, überhaupt auf jeder ringsum und in Bezug auf jeden ihrer Punkte gleichförmigen Fläche der Flächeninhalt des von drei Hauptlinien begrenzten Dreiecks gleich ist der Differenz z zwischen der Winkelsumme und 2 R, multipliziert mit der zweiten Potenz des Radius jener gleichförmigen Fläche. Also ist auf der mit L-bogenförmigem Radius von der Länge 1 beschriebenen Kugel der Flächeninhalt des Dreiecks einfach gleich z, und der Flächeninhalt des ebenen Dreiecks ist (da z negativ und der Radius gleich $+i = \sqrt{-1}$ ist) ebenfalls gleich dem absoluten Werte von z."

„Lobatschefskij vergleicht die Winkel schon in § 16 mit π, und da man unter Winkeln nur den zwischen den unendlichen Schenkeln befindlichen unendlichen Teil der Ebene oder aber ein bloßes Verhältnis verstehen kann, so ergibt sich daraus im Verein mit dem Übrigen, daß

er unter Winkeln immer ein Verhältnis versteht. Und er kann dies, wenn er als *Winkelhauptmaß* jenen Winkel wählt, bei dem sich der um den Scheitelpunkt zwischen den Schenkeln beschriebene Kreisbogen zu dem Halbkreise mit gleichem Radius so verhält wie 1 zu dem unabhängig von der Raumlehre bestimmten π. Wenn er dann aber behauptet, daß der in diesem Sinne vorhandene *Kugel-Sektor* oder *zweizipflige Winkel* gleich dem bei dem Scheitelpunkt befindlichen Ebenenwinkel, also die Oberfläche der Halbkugel gleich π sei, so ist die Behauptung teils unbegründet und unbestimmt, teils geradezu falsch. Der Winkel in dem genannten Sinne ist nämlich unabhängig vom Radius. Da aber der Sektor sich mit dem Radius ändert, so fehlt hier augenscheinlich etwas Wesentliches, nämlich die Angabe des Radius jener Kugel, von deren Sektor die Rede ist. Von diesem Radius läßt sich *erst später* zeigen, wie groß er zu nehmen ist, und daß es am einfachsten ist, ihn gleich der senkrechten Ordinate des mit i gleichen L-Bogens zu nehmen. Dann kann man aber beweisen, daß nicht der *ganze* Sektor, sondern dessen *Hälfte* dem genannten Winkel gleich ist. Also hat Lobatschefskij hier einen groben Fehler begangen, es sei denn er habe, was man kaum voraussetzen kann, als Kugelradius die senkrechte Ordinate des mit $2i$ gleichen L-Bogens genommen." —

An einer späteren Stelle ist Johann — in Gestalt einer längeren Anmerkung — auf die Winkelmessung zurückgekommen. „Einen Winkel", sagt er, „kann man am direktesten dadurch bestimmen, daß man ihn — indem er an sich eine unendliche Größe ist — mit einem anderen Winkel in der Weise vergleicht, daß man ihre Scheitelpunkte zusammenfallen läßt. Auf diese Weise betrachtet man ihn als relative Größe und vergleicht ihn mit 4R; der Winkel R, gewöhnlich ein Rechter benamset, kann dann mit Recht Haupt-, Grund- oder Viertelwinkel genannt werden. Diese erste *synthetische* Art ist die einfachste."

„Als zweite, aber verwickeltere und tiefere Einsicht benötigende Art bietet sich die folgende. Da F jedenfalls existiert und auf F der Kreisbogen zwischen den Schenkeln eines Winkels ein konstantes Verhältnis zu seinem Radius hat, so gebe man dieses Verhältnis an und bestimme daraus das Verhältnis des Winkels zu $4R$, da allein dieses eine klare Vorstellung von der Größe des Winkels gibt."

„In S ist natürlich auch das eine Bestimmung des Winkels, daß man sowohl die Länge des ebenen Kreisradius als auch die des zwischen den *geraden* Schenkeln enthaltenen Kreisbogens durch Zahlen angibt. Dies ist aber mit noch mehr Umständlichkeit verbunden, sodaß als einzige natürliche, einfache und praktische Art nur die *erste* bleibt."

Was würde Lobatschefskij auf diese Auseinandersetzungen erwidert haben? Versuchen wir, um die Pflicht der Gerechtigkeit zu erfüllen, seine Verteidigung zu führen! Allerdings habe er, das müsse er zugeben, in den *Geometrischen Untersuchungen*, die er möglichst kurz gestalten wollte, nicht ausdrücklich gesagt, was er unter π verstehe, allein aus S. 9 gehe doch deutlich hervor, daß bei ihm π nur ein Zeichen für 2R sein solle. In § 27 aber handle es sich darum, zu zeigen, daß ein dreiseitiger *Körperwinkel* gleich der halben Summe der Flächenwinkel weniger einem Rechten sei, und dafür bedürfe es keineswegs der Angabe des Radius der Kugel; die Halbkugel bedeute hier weiter nichts als einen Ebenenwinkel von 2R. Das werde bestätigt durch die ausführlichere Darstellung, die er bereits in der Abhandlung vom Jahre 1829 gegeben habe, dort heiße es:

„Die Größe eines Kreisbogens wird durch dessen Vergleichung mit dem Umfang bestimmt, von dem der Bogen ein Teil ist. Dieses Verhältnis hängt nicht von der Größe des Halbmessers ab, sondern von der gegenseitigen Lage der beiden Halbmesser, die durch die Enden des Bogens gehen. Um willkürlich zu lassen, welcher Bogen als Einheit benutzt wird, werden wir den Umfang mit 2π bezeichnen. Ein so dargestellter Bogen heißt *geradliniger Winkel*, oder Winkel der beiden Geraden, die durch die Enden des Bogens gehen und im Mittelpunkte des Kreises zusammentreffen. Ebenso werden wir mit 2π auch die Kugelfläche bezeichnen, wenn wir die Ausschnitte auf dieser im Vergleich mit ihr bestimmen. Wenn der Ausschnitt durch zwei Ebenen entsteht, die durch den Mittelpunkt gehen, so ist seine Größe ein *Ebenenwinkel*, bei anderen Ausschnitten ein *körperlicher Winkel*. Ebenenwinkel und körperliche Winkel hängen nicht von dem Halbmesser der Kugelfläche ab, sondern von der gegenseitigen Lage der Ebenen, die von dem Mittelpunkte der Kugelfläche ausgehen."

In den *Neuen Anfangsgründen* (1836) sagt Lobatschefskij sogar: „Die Zahl π nimmt man zuweilen gleich 200 an, häufiger jedoch gleich 180, je nachdem man der neuen dekadischen Teilung oder der alten Sechzigteilung folgt. . . . Zuweilen versteht man unter π eine Zahl, die man nur näherungsweise finden kann, und die sich nur sehr wenig von dem Bruche 355 : 113 unterscheidet."

Wenn man den ungewöhnlichen Gebrauch der Zahl π tadeln will, so ist zu bemerken, daß auch der *Appendix* manche ungewöhnliche Bezeichnung enthält und vielfach verlangt, daß der Leser zwischen den Zeilen liest, z. B. wenn in § 26 ohne jede weitere Erklärung von dem Sinus der Seite eines sphärischen Dreiecks geredet wird.

Zum Schlußsatze von § 32 bemerkt Johann:

„Die Bemerkung, F sei eine Kugel und L ein Kreis von unendlichem Radius, ist in dem Sinne, daß Kugel und Kreis einen Mittelpunkt haben, falsch. Man kann aber den Begriff von Kugel und Kreis so verallgemeinern, daß darin nicht nur F und L, sondern auch die *Hypersphären* und *Hypercyklen* enthalten sind."

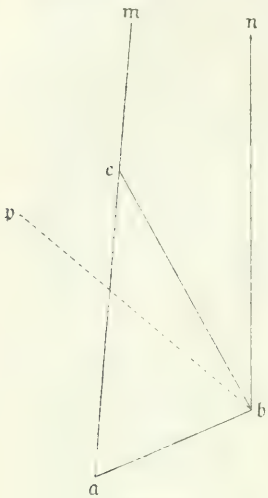


Fig. 15

„Für F und L kann man dies sogar rein geometrisch erreichen, wenn man folgende Definition aufstellt: bc (Fig. 15) *liegt an* ac, wenn alle Punkte von ac auf derselben Seite von $\widetilde{bc}$ liegen, ac jedoch von jeder Geraden bp, die durch b in $\wedge\, abc$ gezogen wird, in zwei Stücke zerschnitten wird." Hier können, wie Johann bemerkt, ac und bc sowohl endliche als auch unendliche Strecken sein.

„Dagegen kann die Verallgemeinerung für die Hypersphären und Hypercyklen nur *analytisch* und zwar dadurch erfolgen, was auch für F und L gilt, daß man bei den überall gleichförmigen Flächen jene Länge den Radius nennt, mit der man die Seite der auf dieser Fläche gelegenen Dreiecke zu dividieren hat, damit man auf sie die bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie mit dieser Abänderung anwenden kann."

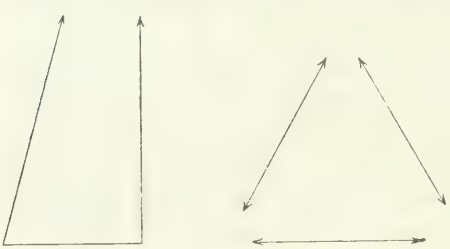


Fig. 16

„Den Namen *Grenzdreiecke*, den Lobatschefskij Dreiecken auf F gibt, möchte ich zweckmäßiger dem asymptotischen ebenen [Dreieck] (Fig. 16) mit endlicher oder einseitig oder beiderseitig unendlicher Grundlinie beilegen."

Von dem Beweise, der in § 33 für die Gleichung

$$s' = se^{-x}$$

gegeben wird, sagt Johann mit Recht, daß er „nicht so durchsichtig ist, wie er sein sollte"; auch Hoüel hat in seiner französichen Übersetzung der *Geometrischen Untersuchungen* hier eine erläuternde Anmerkung unter dem Texte für erforderlich gehalten. Übrigens läßt die Herleitung, die Lobatschefskij im Jahre 1837 in § 117 der *Neuen Anfangsgründe* gegeben hatte, an Klarheit nichts zu wünschen übrig, und nur das Streben

nach Kürze hat der Fassung des § 33 der *Geometrischen Untersuchungen* geschadet. Hieraus erklären sich auch verschiedene andere Mängel dieses Werkchens, das ohne Zweifel, was die Kunst gedrängter und doch deutlicher Darstellung betrifft, hinter dem *Appendix* zurücksteht.

Johann hat gegen Lobatschefskijs Ausführungen noch weitere Einwendungen gemacht.

„Es ist bei Lobatschefskij ein schlechter Ausdruck, wenn er sagt: e (wie er das hiesige I bezeichnet) sei eine *unbekannte* Zahl, also nicht einmal Größe, die der einzigen Bedingung unterworfen sei, daß sie größer als Eins ist, und er reißt hastig und unvorbereitet, wenn auch nicht unrichtig, die Idee heran, es sei das einfachste, e gleich I zu setzen, sodaß alsdann

$$x = \log[\text{nat}]\, X$$

wird."

„Auch das ist eine unrichtige Behauptung Newtonschen Geschmackes, daß $s' = 0$ für $x = \infty$. Denn es liegt doch im Begriff des Unendlichen, also Endlosen, daß ein letzter *End*zustand unmöglich ist. Vom Unmöglichen aber mehr zu sagen, als daß es *unmöglich* sei, das ist ein Mißbrauch des Wortes, und einen solchen Sprachgebrauch würde schon der vernünftige Ungebildete belächeln, um damit zu zeigen, daß er solche Rede nur für Spaß und Neckerei hält."

Den Ausdruck „unbekannt" hat Lobatschefskij in seiner Abhandlung vom Jahre 1829 so erklärt: „weil es unbekannt ist, welche Linie bei der Messung der Geraden als Einheit genommen wird."

Von besonderem Interesse sind Johanns Bemerkungen zu § 35, in dem Lobatschefskij zeigt, wie man, ohne das XI. Axiom zu benutzen, zu den Formeln der sphärischen Trigonometrie gelangen kann.

„Wie im *Appendix* der § 29 gewiß einer der wesentlichsten Punkte ist, so beginnt hier Lobatschefskijs bedeutendste Originalität und seine wichtigste Abweichung vom *Appendix*. Und man muß zugeben, daß sein Werk, besonders von hier an, ein schöpferisches Genie verrät, und daß der Weg, den er befolgt, besonders von hier an, und das Ergebnis, zu dem er geführt wird, ihn ohne Zweifel leicht auf einmal zu den Mathematiken ersten Ranges erheben."

„Seine Hauptidee ist klassisch. Mit feinem Takte sucht und findet er am richtigen Ort, in einem wohlversteckten Winkel die Wahrheit, und wenn er auch an manchen Stellen langwierig-verwickelt sich abmüht und tatsächlich ziemlich weit zurückbleibt hinter der Vollkommenheit, die erwünscht ist und die ich auch erreicht habe, so muß man seine Arbeit doch als ein Meisterwerk anerkennen."

„Er gehört zu den wenigen, die die Wichtigkeit dieses im tiefsten Dunkel verborgen gewesenen Gegenstandes bemerkt haben. Daß er bestrebt war, diesen ans Tageslicht zu bringen, und daß er sein Feld mit neuen Gesichtspunkten bereichert hat, gereicht ihm zu um so größerer Ehre; denn bei wichtigen, besonders aber bei verborgenen Gegenständen ist eine mehrseitige Beleuchtung immer wertvoll, wie auch eine politische oder soziale Wahrheit durch mehrere Beweise und durch Kontrolle gewinnt."

„Um nicht im Finsteren herumzutasten wird es gut sein, das Wesen des Zieles, wohin wir streben, zu bezeichnen. Es ist: die zur vollständigen Darlegung der sphärischen und der ebenen Trigonometrie nötigen Formeln aufzufinden. und zwar vorerst nur die einfachsten, aus denen die übrigen folgen."

„Es ist bekannt, daß mit Ausnahme einiger Fälle, in denen die trigonometrischen Aufgaben *zweideutig* lösbar sind, aus drei Elementen [Seiten oder Winkeln] sowohl das ebene wie auch das sphärische Dreieck vollkommen bestimmt ist, also ein rechtwinkliges Dreieck durch irgend zwei von dem R[echten] verschiedene seiner Elemente."

„Demnach müssen stets $3 + 1 = 4$ Elemente in jeder zur Lösung von Dreiecken dienenden Formel vorkommen. Es sind also viererlei Formeln zu allen solchen Aufgaben genügend, nämlich die Relationen:

1. zwischen drei Seiten und einem Winkel $[abcA]$,
2. zwischen zwei Seiten und den beiden Winkeln, die an einer dieser Seiten liegen $[bcAB]$,
3. zwischen zwei Seiten und den gegenüberliegenden Winkeln $[abAB]$,
4. zwischen einer Seite und drei Winkeln $[aABC]$."

„Die Verhältnisse zwischen den Elementen des Dreiecks lassen sich am einfachsten durch die trigonometrischen Funktionen und insofern nur auf einem Umwege darstellen. In den zweideutigen Fällen entsteht die Zweideutigkeit immer dadurch, daß aus der betreffenden Gleichung nur der Sinus des gesuchten Elements gefunden wird."

„Aber gehen wir weiter. Daß zwischen dem Bogenmaß und den Kreisfunktionen *irgend*eines Winkels keine *allgemeine algebraische* Relation bestehen kann, das habe ich — soviel ich weiß und wie ich glaube als erster — mit voller Strenge an anderer Stelle bewiesen, wie auch folgende Lehren von ähnlicher Natur: wann man einen Kreis aus einem Quadrat und überhaupt Figuren auseinander zusammenlegen, also ihre Endlich-Gleichheit beweisen kann; daß man irrationale dritte und höhere Wurzeln nicht durch Quadratwurzeln ausdrücken, also nicht im strengen Sinne geometrisch konstruieren kann; die algebraische Radikallehre mit einer gründlichen Theorie der algebraischen Gleichungen, durch die voll-

kommene Ergänzung des scharfsinnigen zehnten Buches von Euklid. Eine solche Lehre ist auch der strenge Beweis, daß es unmöglich ist, über die Richtigkeit des XI. Axioms zu entscheiden. — Mit dem Gesagten will ich aber nicht behaupten, daß man nicht bei einigen besonderen Bögen, sagen wir bei dem Bogen $\sqrt{2}$, eine algebraische Relation mit dem Sinus finden könne; nicht einmal soviel behaupte ich, daß man π nicht algebraisch ausdrücken kann, da es ja nicht einmal entschieden ist, ob π rational ist oder nicht. Aber das behaupte ich, daß man die oben erwähnten vier trigonometrischen Gleichungen nicht durch algebraische Relationen ausdrücken kann."

Nachträglich hat Johann mit Bleistift hinzugesetzt; „Aber auch das ist fraglich. Adhuc sub iudice lis est." Man wird hiernach auch die vorhergehenden Behauptungen nur als Vermutungen zu betrachten haben.

„Untersuchen wir nun, bevor wir noch jene vier Gleichungen kennen, ihren Inhalt und wie weit etwa die eine in den anderen enthalten ist; dabei beschränken wir uns auf das sphärische Dreieck, da dessen Trigonometrie in dem antieuklidischen Raume nicht nur mit der ebenen Trigonometrie übereinstimmt, sondern sich daraus auch die F-Trigonometrie ergibt, indem man den Radius unendlich wachsen läßt."

„Aus der *ersten* Gleichung [also aus $abcA$] ergibt sich durch Vertauschung von a und A mit b und B eine ähnliche Gleichung $bacB$ oder $abcB$. Vertauscht man hingegen a und A mit c und C, so gewinnt man $abcC$. Sehen wir nun, was aus zwei solchen Gleichungen folgt. Wenn wir aus $abcA$ und $abcB$ einmal a, ein andermal c eliminieren, so gewinnen wir eine Beziehung, das eine Mal zwischen $bcAB$, das andere Mal zwischen $abAB$. Diese müssen mit der zweiten bez. dritten Gleichung identisch sein, denn sonst könnte man noch eine Größe eliminieren und würde eine Gleichung zwischen *drei* Elementen erhalten, was unmöglich ist, da drei Elemente zwischen gewissen Grenzen beliebig gewählt werden können. Aus $bcAB$ fließt die ähnliche Gleichung $bcAC$, und wenn wir aus diesen c oder b eliminieren, so erhalten wir die vierte Relation zwischen [$bABC$ oder] $cABC$. Also enthält die erste Gleichung auch die übrigen in sich."

„Aus $bcAB$ fließt — wie schon gesagt — $cABC$. Diese unterscheidet sich von der ersten [$abcC$] nur dadurch, daß, wo in der einen große Buchstaben stehen, in der anderen kleine sind. Also fließen aus $aABC$, das heißt aus der vierten Gleichung, und folglich auch aus der zweiten, alle übrigen."

„Aus $abAB$ fließt $acAC$ und $bcBC$, aber aus je zweien dieser drei [Gleichungen] kommt immer nur die dritte heraus. Man gewinnt also auf diese Weise nie etwas neues."

In verschiedenen Aufzeichnungen hat Johann versucht, aus dem Sinussatze $abAB$ die erste Gleichung, und damit alle zu erhalten, indem er das Dreieck durch eine Transversale in zwei Teildreiecke teilt und auf diese den Sinussatz anwendet; die wirkliche Durchführung der Rechnung zeigt aber, daß man dabei immer nur zu dem Sinussatze für das ursprüngliche Dreieck zurückgelangt.

Johann betrachtet nunmehr das rechtwinklige Dreieck, bei dem, wenn C der rechte Winkel ist, nur die 6 wesentlich verschiedenen Gleichungen abc, abA, acA, acB, aAB, cAB (und die durch Vertauschung der Buchstaben daraus entstehenden abB, bcB, bcA, bAB) auftreten und untersucht deren Abhängigkeit voneinander.

Nachdem er dann Lobatschefskijs Herleitung der Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks wiedergegeben hat, bemerkt er:

„So auf Kanten gehend und auf Spitzen stehend, bringt Lobatschefskij sehr, sehr herrlich und edel, vorzüglich und trefflich, nach Art der geschicktesten und feinsten Künstler des Drahtseiltanzes, die Selbständigkeit der sphärischen Trigonometrie heraus."

„Aber *dieser* Teil der Sache kann auch *ohne* alle solche Vorbereitungen auf folgendem Wege erledigt werden. Wenn der Radius der Kugel $\backsim 0$, dann sind auf der Kugel die Verhältnisse entweder dieselben als in Σ oder aber — um mich kurz auszudrücken — sie streben auf diese zu. Nun aber sind diese Verhältnisse bei jedem Radius unveränderlich und von diesem unabhängig. Also [kann nur der erste Fall eintreten]."

„Auch der folgende Weg führt zum Ziele. Es ist Σ die Grenze von S, sodaß jede auf die Annahme von S gegründete Relation in ihrer Grenze für $i \backsim \infty$ auch in Σ gilt. Da nun in Σ die bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie bestehen, so kann in S die sphärische Trigonometrie nur so beschaffen sein, daß sie entweder stets mit der in Σ übereinstimmt oder aber wenigstens beim Grenzübergang zu den in Σ giltigen Relationen führt. Da aber im sphärischen Dreieck alle Bestandteile Winkel sind, so gilt hier von den beiden Fällen der *erste*, d. h. jene Relation in S ist für jedes i konstant. Folglich kann von beiden Fällen nur der erste gelten."

In § 36 bestimmt Lobatschefskij die Funktion $\Pi(x)$ und findet die Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}.$$

„wo e jede beliebige Zahl sein kann, die größer als die Einheit ist, weil $\Pi(x) = 0$ für $x = \infty$". Indem er glaubt, hier den schwachen Punkt in der Stellung seines Nebenbuhlers gefunden zu haben, führt Johann gegen

diese zwei Zeilen der *Geometrischen Untersuchungen* einen wuchtigen Angriff. In der Tat läßt sich nicht leugnen, daß hier ein Mangel vorliegt, der freilich nicht so groß ist, wie Johann behauptet. Da seine Auseinandersetzungen an Klarheit zu wünschen übrig lassen, indem gerade der Kernpunkt nicht mit ausdrücklichen Worten ans Licht gestellt wird, so sei es gestattet, die betreffenden Aufzeichnungen Johanns zu unterdrücken und lieber den Sachverhalt in Kürze darzustellen.

In § 33 war gezeigt worden, daß für zwei Grenzbogen s und s' zwischen denselben Achsen, die den Abstand x haben, die Gleichung

$$\frac{s'}{s} = e^{-x}$$

gilt, wo „e eine unbekannte Zahl und nur der Bedingung $e > 1$ unterworfen ist.“ In § 36 beweist Lobatschefskij, daß der Ausdruck

$$(\cot \tfrac{1}{2} \Pi(x))^{\frac{1}{x}}$$

von x unabhängig, also eine Konstante ist; welchen Wert diese Konstante habe, bleibt dabei noch unentschieden. Gegen diesen Beweis, den Johann mit Recht „versteckt, schwer zu finden, großartig und glänzend“ nennt, läßt sich nichts einwenden, allein es ist ein Mangel, daß Lobatschefskij jene Konstante wiederum mit e bezeichnet; denn wenn er auch ausdrücklich sagt, daß „e jede beliebige Zahl sein kann, die größer als die Einheit ist“, so gilt dasselbe doch auch von der in § 33 auftretenden Zahl e. Daß der russische Geometer selbst ein Gefühl hierfür gehabt hat, zeigt seine 1855 erschienene *Pangéometrie*; dort schreibt er nämlich zuerst (*Oeuvres*, t. II, S. 621):

$$\frac{s'}{s} = E^{-x}$$

und alsdann (S. 633):

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$$

und beweist später (S. 645), daß

$$E = e$$

ist; allerdings findet er diese Gleichung gewissermaßen als Nebenergebnis von Rechnungen, die bei der Aufstellung der allgemeinen Gleichung der geraden Linie angestellt werden.

Ein Fehler würde bei Lobatschefskij nur dann vorliegen, wenn er ohne Beweis die Gleichheit der beiden Konstanten behauptet oder gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$\frac{s'}{s} = e^{-x}, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$$

mit demselben Werte der Konstanten e. also etwa beide Male mit e als Basis der Neperschen Logarithmen, angewandt hätte. Das ist jedoch,

wie man sich leicht überzeugt, nicht der Fall, vielmehr tritt in § 36 allein die zweite Gleichung auf (S. 55 und implizite S. 60—61); dann aber ist es an und für sich gleichgültig, welchen Wert man der Konstanten e beilegt, und daher erlaubt, den für die Durchführung der Rechnungen bequemsten Wert zu nehmen.

Hierin liegt wohl auch der Grund, daß Lobatschefskij, dessen Endziel war, „weil der Umfang seiner Arbeiten vielleicht seine Landsleute gehindert habe, dem Gegenstande zu folgen, allein das Wesentliche seiner Untersuchungen darzulegen", die Frage nach der Beziehung zwischen den beiden in den §§ 33 und 36 auftretenden Konstanten nicht erörtert hat, *obwohl ihm deren Gleichheit sehr wohl bekannt gewesen ist;* er brauchte diese eben nicht zur Ableitung der Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks, deren Aufstellung den Abschluß seiner *Geometrischen Untersuchungen* bilden sollte.

Daß Lobatschefskij jene Gleichheit sehr wohl gekannt hat, zeigt seine Abhandlung: *Über die Anfangsgründe der Geometrie* vom Jahre 1829. Dort leitet er nämlich zuerst die Gleichung für $\Pi(x)$ her und beweist erst später, daß alsdann $s' : s = e^{-x}$ ist, „eine Gleichung, die man auch unmittelbar erhalten kann, indem man sich auf die Eigenschaften der Grenzkreise stützt". Hiermit ist augenscheinlich die Herleitung gemeint, die er 1836 in § 117 der *Neuen Anfangsgründen* gegeben und daraus 1840 in die *Geometrischen Untersuchungen* herübergenommen hat. Hierdurch wird die Behauptung Johanns, daß der Verfasser dieses Werkes den *Appendix* gekannt haben müsse, in dem die Gleichheit der beiden Konstanten bewiesen wird, widerlegt, und damit fällt gleichzeitig die Folgerung, die er daraus zieht, daß nämlich „hier wahrscheinlich sowohl moralisch als auch wissenschaftlich nicht alles klar ist". Ebensowenig ist es richtig, daß Lobatschefskij „zufällig" oder weil er „durch den *Appendix* irregeführt wurde", darauf gekommen sei, die beiden Konstanten einander gleich zu setzen. Es wird daher genügen, von Johanns Bemerkungen zu § 36 nur den Beweis für die Gleichheit der beiden Konstanten mitzuteilen.

Um den unvollendeten Beweis Lobatschefskijs zu ergänzen, „sei (Fig. 17) $\mathfrak{am} \perp \mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{am}$, ferner in $\angle\, \mathfrak{bam}$, $\mathfrak{bp} \perp \mathfrak{ab}$, $\angle\, \mathfrak{abn} = u$, $\angle\, \mathfrak{pbn} = z$, $\mathfrak{ac} = \mathfrak{ab} = c$, $c\mathfrak{d} \perp \mathfrak{bp}$, und $c\mathfrak{d}$ schneide $\mathfrak{bn}$ in $\mathfrak{e}$. Dann ist:

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} u = \operatorname{cotg} (\tfrac{1}{2} R - \tfrac{1}{2} z) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} z}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} z}$$

$$= 1 + 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z + w,$$

wo w [sogar im Verhältnisse zu z] $\backsim 0$, wenn $c \backsim 0$."

„Andererseits ist dann [nach § 23 des *Appendix*]

$$C \doteq \frac{ab}{ce},$$

d. h.

$$\frac{1}{C}\frac{ab}{ce} \backsim 1.“$$

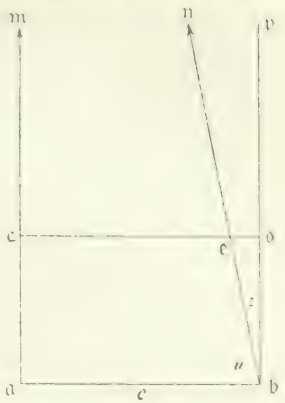


Fig. 17

Das Zeichen $\doteq$ bedeutet, daß die linke Seite der rechten für $c \backsim 0$ gleich wird.

„Es ist aber $ce = c\delta - e\delta$, und nach § 27 des *Appendix*:

$$\frac{c\delta}{ab} : \frac{1}{\sin u} \backsim 1, \quad \frac{ac}{b\delta} \backsim 1,$$

und nach einer unabhängig von der fraglichen Gleichung beweisbaren andern werden sich in einem $\backsim 0$ seitigen $\triangle be\delta$ und ebenso in jeder $\backsim 0$ Figur, die Relationen zwischen den Elementen allmählich jenen in F oder Σ nähern. Also ist

$$\frac{\delta e}{c} \backsim \operatorname{tg} z,$$

und man hat:

$$\frac{\delta e}{c \operatorname{tg} z} \backsim 1, \quad \frac{\delta e}{cz} \backsim 1.$$

Daraus folgt, die Punkte des Beweises nur leicht berührend:

$$c\delta \doteq \frac{c}{\sin u}, \quad \delta e \doteq cz, \quad ce \doteq \frac{c}{\sin u} - cz,$$

$$\frac{c}{\frac{c}{\sin u} - cz} = \frac{\sin u}{1 - z \sin u} \doteq C$$

$$\doteq \frac{\cos z}{1 - z \cos z}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}z^2 + \cdots}{1 - z + \cdots} = 1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + \cdots$$

Hieraus ist [wenn man $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Pi(c) = \mathfrak{C}$ setzt]:

$$\frac{\log \text{nat } C}{\log \text{nat } \mathfrak{C}} = 1$$

und damit

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\Pi(c)\right) = C$$

in Wirklichkeit erkämpft, nicht nur im Traume oder in der Einbildung.“

Auch an dem Schlußparagraphen der *Geometrischen Untersuchungen*, § 37, hat Johann verschiedene Ausstellungen zu machen. Er tadelt, daß

der Übergang von der imaginären zur gewöhnlichen Geometrie „leichtsinnig und oberflächlich“ gemacht werde, und vermißt die wichtigen Bemerkungen, daß „die Relationen der ebenen Trigonometrie von S nach denen in Σ hinstreben, wenn $i \backsim \infty$“, daß ferner „S, da es, wenn man darin, für den Fall von Σ, $i \backsim \infty$ nimmt, Σ als Grenze in sich begreift, *in diesem Sinne*, obgleich es auf eine grundlose und willkürliche Voraussetzung aufgebaut worden ist, doch selbständig und unabhängig wahr ist“, und daß endlich, wenn „man in S das $\backsim$ 0-seitige Dreieck mit dem endlichen F-Dreieck vergleicht, durch Grenzübergang aus der ebenen Trigonometrie auch jene von F erhalten werden kann.“ In der Tat ist es ein wichtiger Vorzug des *Appendix*, daß die Formeln der Trigonometrie die Konstante i enthalten, sodaß man, in der modernen Ausdrucksweise, in der Lage ist, das Krümmungsmaß des Raumes abzuändern, während diese Formeln bei Lobatschefskij abgeleitet werden, indem von vornherein $i = 1$ gesetzt wird.

Von größerer Bedeutung als diese Beanstandungen ist die Kritik des Ausspruches Lobatschefskijs, daß die gewonnenen Formeln der ebenen Trigonometrie «für sich selbst schon eine hinreichende Grundlage gewähren, um die Voraussetzungen der imaginären Geometrie als möglich anzusehen». „Um dies behaupten zu können“, bemerkt Johann, „dazu wäre ein strenger Beweis notwendig, den ich, um den Gegenstand auch nach dieser Seite hin abzuschließen, zur Zerstreuung jedes Zweifels und jeder Unwahrheit, in *echt* mathematischem Geiste führen werde.“ Wenn Johann hiermit gemeint hat, aus der Widerspruchslosigkeit der Formeln der *ebenen* Trigonometrie folge noch nicht, daß das XI. Axiom nicht etwa durch *räumliche* Konstruktionen bewiesen werden könne, so ist dieser Einwand ohne Zweifel berechtigt. In der Tat hat Johanns Nachlaß gezeigt, daß dieser hier über Lobatschefskij hinausgekommen ist, ohne daß ihm freilich die wirkliche Durchführung des „strengen Beweises“ geglückt wäre.

Weiter erklärt Lobatschefskij, daß es demnach kein anderes Mittel gebe, um über die Genauigkeit zu urteilen, die den Berechnungen der gewöhnlichen Geometrie zukomme, als die astronomischen Beobachtungen zu Hilfe zu nehmen; aus diesen folge aber, wie er in einer seiner Abhandlungen gezeigt habe, daß in Dreiecken, deren Seiten unseren Ausmessungen zugänglich sind, die Summe der drei Winkel noch nicht um den hundertsten Teil einer Sekunde von zwei Rechten verschieden ist. In Wirklichkeit folgt sogar, da bei Lobatschefskij ein Rechenfehler vorliegt, daß die Abweichung weniger als den hunderttausendsten Teil einer Sekunde beträgt.

Über die Frage der *praktischen Entscheidung* äußert sich Johann folgendermaßen: „Das Auge ist unser feinstes, edelstes und schärfstes Sinnesorgan. Jedoch würde der Beobachter, schon wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung, irren, wenn er nicht die Fehler durch weitere Untersuchung zu berichtigen strebte. Denn seien auch unsere zur Längen- und Winkelmessung dienenden Instrumente noch so starr, und mögen wir auch mit der größten Sorgfalt messen und von wie immer *Großem* zum Kleineren übergehen: so kann trotzdem niemand versichern, daß zwei von der Natur oder künstlich erzeugte Gegenstände ihre gegenseitige Lage soweit beibehalten, daß wenigstens wir keine Veränderung daran feststellen können. Es kann nämlich ein Erdbeben sogar einen Granitfelsen von seiner Stelle wegrücken. Nur durch kontrollierende Messungen können wir uns über die genügende Genauigkeit beruhigen. Die Aberration des Lichtes wird nur für das Licht der Himmelskörper eintreten."

„Weil beim Übergange vom Kleineren zum Größeren sich die beim Kleinen begangenen Fehler vergrößern, hingegen beim Übergange vom Größeren zum Kleineren die beim Größeren begangenen Fehler weniger bemerkbar werden, so nehmen wir ein möglichst großes, wenigstens ungefähr zugängliches (wobei dann noch eine *Centrierung* erforderlich sein wird) und vom gleichseitigen nicht sehr verschiedenes Dreieck, dessen Spitzen auf möglichst hohen Bergen mit weiter Aussicht liegen, und messen dessen 3 Winkel mit dem besten, freilich auch teuersten und kompliziertesten Apparate, mit dem Multiplikationstheodoliten oder gar mit dem Multiplikationskreise von Reichenbach."

„Welches ist die größte Genauigkeit, die wir erhoffen können? Wir können angenähert die Erde als eine Kugel betrachten, deren Radius gleich 1000 geographische Meilen ist; der höchste Berg, der *Dhvalagiri*, ist etwa eine Meile. Von seinem Gipfel ist die Tangente an die Erdkugel

$$\sqrt{1001^2 - 1000^2} = \sqrt{2001} = 44{,}7 \text{ Meilen.}$$

Also ist die größte Entfernung auf Erden, von deren einem Ende zum andern man sehen kann, höchstens etwa 45 Meilen; aber sie wird wegen der lokalen Hindernisse kaum mehr als 30 Meilen sein. Bei den katastralischen Messungen in Österreich war die größte Dreiecksseite nur etwa $6\frac{1}{2}$ Meilen. Auch darf man nicht vergessen, daß bei größerer Entfernung mehr Gelegenheit zu atmosphärischer Strahlenbrechung vorhanden ist; wenn man also durch große Entfernungen auch etwas gewinnt, so werden dadurch andererseits unberechenbare Verluste und Zweifel entstehen."

„Nunmehr setzen wir voraus, daß, wie bei der österreichischen

Landmessung, die Längen und Längenunterschiede der Meßruten bis auf $^1/_{100000}$ alte Pariser Klafter bestimmt werden."

„Mit dem Herschelschen Fernrohr kann man die Teile des ungefähr 51000 Meilen von der Erde entfernten Mondes so sehen, als wären sie nur 17 Meilen entfernt, d. h. mit 3000facher Vergrößerung. Im Vergleich hierzu könnte das Roßhaar, das man mit bloßem Auge auf 10 Klafter sieht, noch auf 30000 Klafter, also $7^1/_2$ Meile gesehen werden. Da nun der Kreis mit einem solchen Durchmesser einen Umfang von

$$\tfrac{22}{7} \times 30000 \times 100000\, p = \tfrac{66}{7} \text{ tausendmillionen } p,$$

also ungefähr zehntausendmillionen p hat, wo

$$p = \tfrac{1}{100000} \text{ Klafter},$$

und da der Kreisumfang aus

$$360 \times 60^2 = 1296000 \text{ Sekunden}$$

besteht, so ist die erreichbare Genauigkeit ungefähr $^1/_8$ Sekunde, und wenn statt $7^1/_2$ Meilen 30 Meilen genommen werden, so wird die Genauigkeit erst $^1/_{32}$ Sek. Aber nehmen wir an, daß man mit der Zeit durch noch schärfere Fernröhre $^1/_{100}$ Sek. erreichen könne."

„Wenn wir aber auch die Winkel und damit die Winkelsumme möglichst genau abmessen und genau 2R bekommen, wer kann nun versichern, daß die atmosphärische Strahlenbrechung und der Einfluß anderer unberechenbarer Umstände keine auch für uns merklichen Fehler verursacht? Umgekehrt, wenn die Winkelsumme, sagen wir um 16 Minuten, weniger gefunden würde — ein Unterschied, den bei der Entfernung von 30 Meilen schon eine Deklination von 1 Klafter verursachen kann — wer kann dann behaupten, daß ein *solches*, oder daß überhaupt *irgend* ein S richtig sei und nicht Σ? Ja es könnte sogar bei den Messungen das ganz *naturwidrige* Resultat herauskommen, daß die Summe $>$ R."

„Mithin kann durch irdische Messungen nicht entschieden werden, ob Σ oder irgend ein S gilt."

Man könnte aber dazu den Unterschied benutzen, meint Johann, der in unseren Rechnungen eintritt, wenn wir den Ort der Himmelskörper zuerst unter der Voraussetzung berechnen, „daß die Winkelsumme des Dreiecks gleich 2R und die *Massenanziehung* immer in umgekehrtem Verhältnisse mit der Kugeloberfläche sei, deren Radius die Entfernung der beiden Körper ist" und dann die Rechnung für „immer größere Abweichungen der Winkelsumme von 2R" wiederholen. Wenn so, um die schönen Worte meines Vaters zu gebrauchen, die Zeit ihrem ewigen Verwandten, dem Raume, zu Hilfe kommt, so

kann man sich beruhigen, daß man mit einer im *ganzen Gebiete unserer praktischen Untersuchungen* ausreichenden Genauigkeit, aber freilich nie und nirgendwo mit theoretischer Genauigkeit, Σ annehmen darf. Also — denn nur auf diesem Wege konnte Lobatschefskij zum Ziele kommen — wenn man im größten irdischen Dreieck die Winkelsumme $= 2R - \frac{1}{100}$ Sek. setzt und dann die bis dahin beobachtete Übereinstimmung der wirklichen und der berechneten Bewegung der Himmelskörper aufhört und der Widerspruch mit dem Unterschiede von 2R eine Weile wächst, so kann man daraus mit Recht schließen, daß in dem genannten Dreieck die Winkelsumme weniger als $\frac{1}{100}$ Sek. von 2R verschieden ist. Wenigstens ist dies so lange berechtigt, bis die gewonnenen Ergebnisse nicht durch Verbesserung der optischen und Meß-Instrumente geändert werden."

Den Schluß der *Geometrischen Untersuchungen* bildet die Bemerkung, daß „die Gleichungen der ebenen Trigonometrie in die Gleichungen für sphärische Dreiecke übergehen, wenn man statt der Seiten a, b, c setzt $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$." Denn alsdann müsse man

$\sin \Pi(a)$ durch $\frac{1}{\cos a}$, $\cos \Pi(a)$ durch $\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{tg}\, a$, $\mathrm{tg}\, \Pi(a)$ durch $\frac{1}{\sqrt{-1}\,\sin a}$

ersetzen und auf ähnliche Weise auch bei den Seiten b und c verfahren. Dies ins Reine zu bringen hat Lobatschefskij allerdings dem Scharfsinn des Lesers überlassen, und insofern darf seine Darstellung als zu knapp bemängelt werden, allein einen Fehler, wie Johann meint, hat er damit nicht begangen.

Von erheblicherer Bedeutung ist es, wenn Johann sagt, daß Lobatschefskij nur „wahrgenommen" habe, daß durch „Einsetzen" von $\frac{1}{\cos a}$ für $\sin \Pi(a)$ die Formeln der ebenen Trigonometrie in die der sphärischen übergehen, und daß ihm die „tiefere Einsicht und Durchdringung zu mangeln scheine". In der Tat war Johann hier dem Wesen der Sache näher gekommen. Seine „tiefere Einsicht" hat er mit folgenden Worten ausgesprochen:

„Wie man für das sphärische Dreieck die Seiten durch jenen L-Bogen teilen muß, dessen senkrechte Ordinate gleich dem *geraden* Radius jener Kugel ist, ebenso muß man in der Ebene, um für diese *ebensolche* Formeln anwenden zu können, die Seitenlängen durch $i\sqrt{-1}$ geteilt in die Gleichungen einsetzen. Ist also der Kugelradius so groß, wie die Ordinate des L-Bogens, der gleich einer beliebig gewählten Einheit ist, so kann man mit den Seiten selbst rechnen. In diesem Sinne kann man sagen,

die Ebene sei eine *Hypersphäre* vom *L-förmigen Radius* $i\sqrt{-1}$ oder — was dasselbe sagt — vom *geraden Radius*

$$a = \tfrac{1}{2}\pi i\sqrt{-1} + 2m\pi i,$$

wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet." Daß beide Ausdrucksweisen dasselbe besagen, „erhellt aus der in § 30 des Appendix enthaltenen und auch mit Hilfe der Integralrechnung beweisbaren Gleichung

$$z = i \operatorname{cotg} u$$

und der aus

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{\sqrt{-1}\,\sin\dfrac{a}{i\sqrt{-1}}}$$

folgenden Formel

$$z = \sqrt{-1}\,\sin\frac{a}{i\sqrt{-1}}."$$

„Da die *imaginären L*-förmigen und die *imaginären* geraden Radien bisher noch nirgends definiert waren, so kann über die Bedeutung dieser Ausdrücke kein Zweifel bestehen."

Das Gesagte „kann man auch leicht auf die zur Ebene äquidistanten Hypersphären ausdehnen, und man gewinnt so eines der schönsten, wichtigsten und interessantesten Resultate in der ganzen Geometrie und überhaupt im ganzen Bereiche unseres Denkens."

Die Einsicht, daß in der absoluten Ebene die Hypercykeln zu dem Systeme der Kreise, Grenzkreise und Geraden, im Raume die Hypersphären zu dem Systeme der Kugeln, Grenzkugeln und Ebenen gehören und daß die Geometrie auf den Hypersphären eines S für ein bestimmtes i mit der absoluten Geometrie der Ebene für ein beliebiges i identisch ist, scheint Johann Bolyai eigentümlich zu sein; bei Lobatschefskij findet sich nur ein einziges Mal die Linie der Punkte gleichen Abstandes von einer Geraden (Hypercykel) erwähnt (*Über die Anfangsgründe* 1829).

F. Engel hat im Jahre 1899, drei Jahre ehe die Bemerkungen Johann Bolyais zu N. I. Lobatschefskijs *Geometrischen Untersuchungen* veröffentlicht worden waren, den *Appendix* mit den Schriften des russischen Geometers verglichen. Die in russicher Sprache im Kasaner Boten 1829/30 abgedruckte Abhandlung Lobatschefskijs *Über die Anfangsgründe der Geometrie* sichert diesem, wie Engel ausführt, die Priorität der Veröffentlichung gegenüber Johann, dessen *Appendix* erst 1831 gedruckt und 1832 erschienen ist. „Dafür ist aber wieder zu berücksichtigen, daß J. Bolyais *Appendix* nur eine Anzahl Sätze vor-

aussetzt, die Euklid unabhängig vom Parallelenaxiom bewiesen hat, sonst aber eine wirklich vollständige Begründung der nichteuklidischen Geometrie enthält, die allerdings äußerst knapp gefaßt ist und deshalb vom rein geometrischen Standpunkte aus manches zu wünschen übrig läßt; während dagegen der von Lobatschefskij veröffentlichte Auszug aus der *Exposition* zwar Andeutungen darüber enthält, wie man vom Begriffe der Kugelfläche ausgehend die ganze Geometrie aufbauen kann, andererseits jedoch eine Reihe neuer, der nichteuklidischen Geometrie eigentümlicher Sätze ohne Beweise mitteilt. Hinwiederum darf man nicht übersehen, daß bei Lobatschefskij die neue Geometrie gleich in einer für Anwendungen unmittelbar brauchbaren Form erscheint: die zur Berechnung geometrischer Figuren nötigen Formeln sind systematisch entwickelt, und eine große Anzahl dahin gehöriger Aufgaben ist vollständig gelöst. J. Bolyai gibt in dieser Beziehung nur das Allernotdürftigste: man sieht zwar, daß er den Gegenstand vollständig beherrscht, aber man würde doch eine beträchtliche geistige Arbeit aufwenden müsse, wollte man auf Grund der Andeutungen des *Appendix* selbständig derartige Aufgaben in Angriff nehmen."

Engel geht dann auf die *Neuen Anfangsgründe der Geometrie* ein, diese umfangreiche Abhandlung, die in den Jahren 1835—1838 in den Kasaner Gelehrten Schriften erschienen ist. „Lobatschefskij hat hier eine vollständige, zusammenhängende Entwicklung und Darstellung der neuen Geometrie geliefert, eine Darstellung, an der auch vom rein geometrischen Standpunkte aus verhältnismäßig nicht sehr viel auszusetzen ist. Er war dabei sichtlich bestrebt, die Anfänge der Geometrie von jeder Beimischung der Analysis frei zu halten und die Geometrie rein synthetisch soweit zu entwickeln, bis man imstande ist, «jede Abhängigkeit durch Größen darzustellen und für jede Art geometrischer Größen Ausdrücke zu geben.» Das zeigt sich besonders darin, daß er, bewußt oder unbewußt, in den *Neuen Anfangsgründen* von der Stetigkeit nur sehr sparsamen Gebrauch macht und daß die Zahl der Stellen, wo er die Stetigkeit benutzt, während sie doch vermieden werden kann, äußerst gering ist. Dagegen hat J. Bolyai zwar auch angefangen, eine große und zusammenhängende Darstellung der Geometrie auszuarbeiten, aber was er niedergeschrieben hat, blieb in seinen Papieren vergraben und ist niemals erschienen." Wenn Engel vermutet, „daß J. Bolyai bei seiner Darstellung nach ähnlichen Grundsätzen zu Werke gehen wollte, wie sie Lobatschefskij tatsächlich verfolgt hat", so wird die im XVIII. Kapitel zu besprechende *Raumlehre* zeigen, daß Johann bei der Durchführung seiner Grundgedanken, die allerdings manche Übereinstimmung mit Lobatschefskij zeigen, zwar Stetigkeitsbetrachtungen zu vermeiden versucht

hat, aber dabei auf Hindernisse gestoßen ist, die er nicht überwinden konnte. Wie Engel mit Recht bemerkt, hatte Johann im *Appendix* „unter dem Zwange des Strebens nach äußerster Kürze und Knappheit einen nur allzu ausgiebigen Gebrauch von der Stetigkeit gemacht."

Es mögen noch die Schlußworte Engels angeführt werden. „Um endlich die Vergleichung der beiden Begründer der nichteuklidischen Geometrie zum Abschluß zu bringen und Licht und Schatten in gerechter Weise zu verteilen, sei noch folgender Tatsache gedacht: In seinem *Appendix* geht J. Bolyai insbesondere auf die der nichteuklidischen Geometrie eigentümlichen Konstruktionsaufgaben ein. Zum Beispiel gibt er sehr elegante Lösungen für die beiden Aufgaben: durch einen gegebenen Punkt die Parallelen einer gegebenen Geraden zu ziehen und die Gerade zu zeichnen, die auf dem einen Schenkel eines spitzen Winkels senkrecht steht und zu dem andern Schenkel parallel ist; auch zeigt er, daß im Falle der nichteuklidischen Geometrie eine geometrische Quadratur des Kreises möglich ist. In den *Neuen Anfangsgründen* Lobatschefskijs und in dessen übrigen Arbeiten werden Fragen dieser Art nirgends berührt, nur in der ersten Abhandlung *Über die Anfangsgründe* gibt es Spuren, aus denen mit großer Wahrscheinlichkeit hervorgeht, daß auch er im Besitze von Konstruktionen war, die zur Lösung der beiden zuerst erwähnten Aufgaben dienen können."

XVII. Kapitel

Wolfgang Bolyais letzte Jahre (1848—1856)

Nachdem Wolfgang Bolyai seinem Jugendfreunde Gauss im Jahre 1835 die beiden Bände des *Tentamen* gesandt und von diesem eine freundliche Antwort erhalten hatte, war der Briefwechsel zwischen ihnen wieder ins Stocken geraten. Daß ihn Wolfgang am 18. Januar 1848 wiederaufnahm, hatte, wie im XV. Kapitel berichtet wurde, seinen Grund hauptsächlich in dem Wunsche, etwas über den Titel des russischen mathematischen Werkes zu erfahren, das von Mentovich im *Nationalen Unterhaltungsblatt* erwähnt worden war. Zugleich aber wollte er dem alten Freunde aus seinem dreiundsiebenzigsten Lebensjahre einen letzten, wehmütigen Gruß senden. „Der Tag ist aus. Du hast Deinen würdigen Tage-Lohn erhalten; der meinige ist nur innere Ruhe, ohne irgend eine Belohnung unter der Fahne der Wahrheit selbst, mit dem Schicksal kämpfend, treu geblieben zu sein; wenn ich nur nicht wegen einer Reihe der besten Jahre erröten müßte, wo mich das Nicht-Ergründen der Parallelen samt dazu kommenden tausend Widerwärtigkeiten beinahe verzagt und mutlos machten. Ach wäre doch nur nach einem so stürmischen Tage der Abend nicht so trüb! oder käme bald die Nacht! und nach dem Ausruhen ein schönerer Tag mit der reinen Quelle, um des Wissens ungestillten Durst zu löschen. [Uns] beiden ist der letzte Akt des irdischen Spieles; aber Dir klatscht die Ewigkeit, wenn der Vorhang fällt; ich bin zufrieden, wenn, nachdem die treue Begleiterin unserer Schicksale, die Glocke, am Rande der Erde verhallt, selbst kein Stein mehr von mir spricht."

Der Ton, den Wolfgang angestimmt hatte, fand Wiederhall bei Gauss. „Wie eine Geisterstimme aus längst verklungener Zeit" antwortet er am 20. April 1848, habe ihn der Brief seines teueren, alten Freundes noch einmal in jene Zeit versetzt, zwischen der und dem jetzigen Augenblick so viele, für sie beide so schwere Jahre lägen. „Es ist wahr, mein Leben ist mit vielem geschmückt gewesen, was die Welt für beneidenswert hält. Aber glaube mir, lieber Bolyai, die herben Seiten des Lebens, wenigstens des meinigen, die sich wie der rote Faden dadurch ziehen und denen man im höheren Alter immer wehrloser gegenüber-

steht, werden nicht zum hundertsten Teile aufgewogen von dem Erfreulichen."

Auf die Vorgänge eingehend, die damals alle Gemüter bewegten, bemerkt Gauss weiter: „Das gewaltige politische und soziale Erdbeben, welches in immer weiterer Verbreitung fast alle europäischen Zustände umstürzt, hat bisher Dein Vaterland im engeren Sinne (ich meine *Siebenbürgen*) noch nicht berührt. Ich hege zwar das Vertrauen, daß am Ende erfreuliche Früchte daraus hervorgehen werden; aber die Übergangsperiode wird erst vielfache Bedrängnisse bringen und (*quod tamen deus avortat*) kann lange dauern. In unserm Alter ist es immer sehr zweifelhaft, ob wir das einst bevorstehende goldene Zeitalter erleben."

Die Bedrängnisse, von denen Gauss gesprochen hatte, haben Wolfgangs Heimat bald aufs härteste getroffen. Im September „brach die Wut der Stürme" los. „Mord und Verwüstung war die Losung", klagt Wolfgang am 6. Februar 1853 in seinem letzten Briefe an Gauss. „Der Adel ist vorzüglich zu Grunde gerichtet . . . Nachdem Joseph II. . . . [die] Leibeigenschaft aufgehoben, der Grundbesitz aber dem Besitzer blieb, jetzt, da der Adel auch den Besitz dem Bauern schenkte, anstatt des Dankes haben sie die Edelleute, wo es möglich war, grausam ermordet, ausgeplündert und alles zerstört. Auch mein kleines Landgut, welches ich auf meine letzten Tage schön eingerichtet hatte, haben sie so zerstört, daß ich es nie [mehr] ansehen mag . . . Mittlerweile finde ich mich auf der Erde gleichberechtigt mit meinen Wurm-Kollegen, deren jeder an seinem Gewebe arbeitet, bis ich bald im namenlosen Grabe mit dem Schicksale ausgesöhnt liegen werde. Sterne der ersten Größe bleiben am Himmelsgewölbe der Nacht, worunter auch mein Freund bleibt. So ein kleines Wurm-Werk veranlaßte die Genehmigung des unsere Schule besuchenden Kommissärs vom Ministerio des Kultus [in Wien]; ich schicke es nach der Versicherung des Postmeisters ganz frankiert. In der Arithmetik habe ich Newton zur Stütze gesetzt, in der Geometrie habe ich mit Lobatschewsky angefangen. Ich hatte nicht das Glück, Wege zu bahnen; alles mit wenigen Ausnahmen war entgegen; nun überlasse ich mit ruhigem Gewissen den Pfad allem Unkraut, bis zu den Disteln des Grenzhügels alles Irdischen."

Das „kleine Wurm-Werk" — Wolfgangs Vergleich zielt auf das Gespinnst einer Raupe — war der *Kurze Grundriß eines Versuches*, Maros-Vásárhely 1851, der im zweiten Teile dieses Buches abgedruckt ist. Es war sein letztes Werk, zugleich ein Abschiedsgruß an das Kollegium, aus dem er im Herbst 1851 ausgeschieden ist, nach fast 48-jähriger Lehrtätigkeit. Mit Belassung des vollen Gehaltes und der

Dienstwohnung wurde er unter dem Ausdruck der Anerkennung für seine langen und eifrigen Dienste in den Ruhestand versetzt.

Inzwischen war Gauss in lebhafter Sorge um den Freund gewesen und hatte versucht, Auskunft über dessen Schicksal zu erhalten. Am 3. März 1849 schreibt er an Gerling: „Über Bolyai habe ich auch eine Nachricht gehabt, die freilich noch etwas älter ist als die Ihrige, nämlich durch Mitteilung eines Briefes, den Schumacher von Kreil erhalten hat . . . Freilich sind die rechten Greuelszenen erst später eingetreten und dauern wohl noch immer fort." In dem erwähnten Briefe, der im Februar 1849 abgesandt ist, erzählt Kreil, damals Direktor der Sternwarte in Prag, der im Sommer 1848 in Siebenbürgen meteorologische und magnetische Beobachtungen angestellt hatte und vom 5. bis 8. August in Maros-Vásárhely gewesen war, Folgendes über seine dortigen Erlebnisse.

„In Maros-Vásárhely, einem abgelegenen Städtchen in Siebenbürgen, im Széklerlande, machte ich die Bekanntschaft des alten und würdigen Professors Bolyai, eines Schulfreundes des berühmten Gauss, von dem er, so wie von anderen Heroen sowohl der Wissenschaft als der Literatur, viel zu erzählen wußte und manches interessante Angedenken vorwies (unter anderm eine Federzeichnung von Gauss, die den alten Kästner darstellt, wie er vor der Tafel steht und in der Summation zweier vierziffriger Zahlen eben einen Rechenfehler begeht, ein Unglück, das ihm sehr oft wiederfahren sein soll). Dieser Mann, der dort, wenngleich vermöglich, in einer zynischen Einfachheit und Abgeschiedenheit lebt, uns aber mit der größten Freundlichkeit aufnahm und an unseren Beobachtungen und schönen Instrumenten so großen Gefallen fand, daß er uns nicht mehr von sich lassen wollte, mußte an demselben Tage, als wir von ihm schieden, die bittersten Vorwürfe über seinen Umgang mit uns von seinen Kollegen hören . . . Wie wird es dem guten Bolyai in den Greueltagen, die über das arme Land hereinbrachen, ergangen sein! Ich denke fast täglich an ihn."

Während Wolfgang in Kreil den Vertreter der Urania ehrte und freudig die sich ihm selten bietende Gelegenheit benutzte, in seiner weltabgeschiedenen Heimat einen Boten westeuropäischer Kultur zu begrüßen, hatte man zu Maros-Vásárhely in dem Argwohn, mit dem zu jener Zeit alles, was aus Österreich kam, aufgenommen wurde, Kreil und seine Begleiter wohl als geheime Sendlinge der österreichischen Regierung angesehen. Dazu kam vielleicht, daß Wolfgang, wie Bedőházi berichtet, sich die Erhaltung seiner Nation derart dachte, „daß sie es versuchen sollte, mit der Sprache eines fremden Kulturvolks im Strome der Zivilisation zu schwimmen." Auf eine Anfrage des siebenbürgischen

ev. ref. Oberkonsistoriums über die künftige Einrichtung der Schulen machte er nämlich im Jahre 1852 den Vorschlag, man solle statt des Lateinischen als amtliche Sprache das Deutsche einführen; auch solle man danach trachten, die drei Nationen Siebenbürgens so zu gruppieren, daß sie getrennte Gebiete bewohnten. Ähnlich äußert er sich in dem Briefe an Gauss vom 6. Februar 1853: „Man hat hier die seit Jahrhunderten schlafende National-Wut aufgeweckt, da man statt der lateinischen Sprache, welche Stephan, der erste König von Ungarn, zur allgemeinen festsetzte, auf eine die anderen Nationen aufregende Art das Magyarische einführen wollte. Die allgemeine Sprache soll von allen Nationen eingewilligt und Schlüssel zum Tempel der Wissenschaften sein; mit dem Lateinischen hat es nun in ganz Europa aufgehört, bei uns wäre die deutsche [Sprache als allgemeine zu empfehlen]; hätte Joseph II. noch 20 Jahre gelebt, so hätte sie bis Hamburg alles mit einer Farbe überzogen, und das Geschehene wäre nicht geworden."

Es läßt sich nicht leugnen, daß, wie Bedőházi hervorgehoben hat, hier ein gewisser Widerspruch in Wolfgangs Ansichten vorliegt. Er hatte, wie wir im V. Kapitel gesehen haben, sich eifrig bemüht, die magyarische Sprache den Bedürfnissen der mathematischen Ausdrucksweise anzupassen, und nur mit Widerstreben sein Hauptwerk, das *Tentamen*, in lateinischer Sprache herausgegeben. Auch hatte er 1834 eine magyarische Bearbeitung des ersten Bandes des *Tentamens* veröffentlicht und dieser 1843, ja sogar noch 1850 kleinere mathematische Lehrbücher in seiner Muttersprache folgen lassen. Aber noch mehr, in seinem Lehrbuch der elementaren Arithmetik *Az arithmetica eleje* vom Jahre 1830 hatte er versucht zu zeigen, daß die magyarische Sprache zum Ausdruck mathematischer Begriffe besonders geeignet sei; sein Sohn Johann hat, wie wir im XIX. Kapitel sehen werden, diesen Gedanken aufgenommen und verallgemeinert, indem er auf der Grundlage des Magyarischen eine Weltsprache von idealer Vollkommenheit aufbauen wollte.

Die Erklärung des Widerspruches liegt wohl darin, daß Wolfgangs eifrige Bemühungen, dem Fortschritt der nationalen Wissenschaft und Kultur zu dienen, erfolglos geblieben waren; dazu kam die allgemeine Entmutigung, die nach der Niederwerfung der nationalen Bewegung Platz gegriffen hatte.

In dem wiederholt angeführten letzten Briefe Wolfgangs an Gauss vom 6. Februar 1853 hatte er dem Freunde „vom Grabesrande die Hand zum Abschied gereicht". Aber er, der Ältere, hat den Jüngeren überlebt.

Als Wolfgang in der Allgemeinen Zeitung die Nachricht las, Gauss sei am 23. Februar 1855 gestorben, blieb er lange Zeit „wie ein

träumender Nachtwandler. Bis mir der Gedanke der Möglichkeit einfiel, erstens auf das Grab meines alten Freundes eine zwar Eisblume aus meinem Winter, aber mit dem Herzen aus dem ehemaligen Frühling hinzusenden und zugleich zweitens einige ihn betreffende Züge mitzuteilen" (Brief an Kreil, April 1855).

Die „Eisblume" waren sechs Hexameter in lateinischer Sprache, die sich etwa so wiedergeben lassen:

„Höchstes und Tiefstes zugleich hat kaum ein andrer durchdrungen.
Würdiges schuf er mit gleich scharfsinnigem Geiste in beiden,
Suchte nicht äußeren Glanz, nachdem er den innern gefunden,
Den auch des Todes Gewalt nicht zu verlöschen vermochte.
Sich erfreuend in Gott, mit reinem Herzen wie Newton,
Hat er sich diesem gesellt und weilt in himmlischen Fernen."

Kreil schickte Bolyais Brief an Sartorius von Waltershausen in Göttingen, der damals an seiner Schrift *Gauss zum Gedächtnis* arbeitete. Sartorius wandte sich daraufhin an Bolyai und bat diesen, ihm die Briefe von Gauss zu übersenden. Wolfgang gewährte die Bitte, „zu seinem Todesopfer, daß alles nach Möglichkeit beisammen sei, was seine irdische Bahn, aus welcher er die himmlischen berechnete, bezeichnet; obwohl es ist, als wenn aus dem Zimmer des letzten Geliebten Sarg getragen würde." Am 13. Juli 1856 trennte er sich von den kostbaren Reliquien, bis auf einen kleinen Rest; er behielt die Briefe, „die bloß kommissionell nichts Interessantes enthalten". Außerdem fehlte der wichtige Brief Gaussens vom 6. März 1832, den Wolfgang seinem Sohne Johann überlassen hatte; eine von diesem angefertigte Abschrift folgte am 26. August 1856 der ersten Sendung. Wie schon im XI. Kapitel erzählt wurde, haben sich die fehlenden Briefe, im ganzen fünf, im Jahre 1905 im Nachlaß von S. Szabó gefunden, dessen Sohn, Professor P. Szabó, sie dem Gauss-Archiv in Göttingen geschenkt hat, damit, nach dem Wunsche Wolfgangs, dort alles vereinigt sei, was auf die Laufbahn des großen Geometers Bezug hat.

Sogleich nach dem Tode von Gauss hat Wolfgang seinen *Abschied von der Erde* drucken lassen, eine von ihm selbst verfaßte Todesanzeige, nachdem er bei so manchem andern diese Pflicht übernommen hatte. Sie ist zu lang, als daß sie hier wieder abgedruckt werden könnte, aber die Wünsche wegen seines Begräbnisses sind so eigenartig, daß sie wiedergegeben werden sollen. „Geld habe ich nie gehabt, aber ich kann etwas hinterlassen, was ich nicht mehr besitze und was wertvoller ist als Geld: Wenn das bischen Staub (zwar spät, aber durch Leiden mit Zinsen vermehrt) der Erde zurückgegeben wird, hinterlasse ich einem

jeden, der dazu zu erscheinen beabsichtigt, zwei Stunden, mit der herzlichen Bitte, während dieser seinen häuslichen Geschäften nachzugehen; ich selbst werde ja sowieso dabei nicht zugegen sein. . . . Weder ein Priester noch irgend eine andere Feierlichkeit ist notwendig, nicht einmal eine Glocke. Nur die Schulglocke könnte läuten dem im neuen Schuljahre zum Schüler der höheren Schule gewordenen Professor. . . . Es werde auch kein Denkmal errichtet. Wenn aber jemand einen Apfelbaum vor der Behausung pflanzen wollte, der könnte von denen, die die Früchte pflücken werden, seinen Dank ernten. Dieser Apfelbaum erinnere an jene drei merkwürdigen Äpfel, wie die durch den Apfel unserer Stammutter und den des Paris zum Trabanten der Hölle gewordene Erde durch den Apfel Newtons in die Gesellschaft der Sterne des Himmels erhoben wurde. Jedoch könnte auch das Pflanzen dieses Baumes unterbleiben. Es genügte vollständig die allgemeine Decke, die die Mutter Natur aus Himmel und Erde verbindenden Sonnenstrahlen webt, und die sie, durch täglich frisch herabfallende Tränen grün erhalten, über ihre schlummernden Kinder breitet."

Im Juni 1856 traf Wolfgang ein erster, im August ein zweiter Schlaganfall. Er verglich diese mit der im Gesetz vorgesehenen Ermahnung (*admonitio*), der die Ankündigung (*certificatio*) folgte, um den dritten und letzten Schritt, die Vollstreckung (*executio*), vorzubereiten, und traf daher noch im August seine letzten Anordnungen. Zum Ausdruck seines Dankes vermachte er dem Kollegium zwei Medaillen, die zum Gedächtnis an Gauss geprägt waren, den größten Teil seiner Bücher, darunter die übrig gebliebenen Exemplare seiner Werke, und zwei auf zusammen 9445 Gulden lautende Schuldbriefe, die er von seinem Bruder Anton geerbt hatte. Der Zweck dieser Stiftung war die Förderung der Anstalt und insbesondere des mathematischen Unterrichts; die nach einem langen Rechtsstreit aus den Schuldbriefen erlöste Summe von 750 Gulden ist im Jahre 1874 als Beitrag zur Errichtung eines neuen Lehrstuhls für Mathematik verwendet worden.

Daß Wolfgang seine Bücher teils dem Kollegium, teils der Telekischen Bibliothek in Maros-Vásárhely vermacht hatte, gab Veranlassung zu einem neuen, letzten Zwiespalt mit Johann, nachdem Vater und Sohn während der letzten Jahre in gutem Einvernehmen gelebt hatten. „Als er mir sein Vorhaben betreffs seiner Bücher erklärte", erzählt Johann, „erwiderte ich: «Wohlan, es steht Ihnen frei, ich kann nichts dawider haben», nur so viel bemerkte ich noch, daß ich das an seiner Stelle nicht getan hätte. Worauf ich ziemlich mißmutig und mit schmerzlichem Gefühle «Lebe wohl» sagte und mich entfernte, mit dem Vorsatze, nicht eher wieder zurückzukommen, als bis er mich gerufen habe.

Zu stolz und eigensinnig, um seinen einmal gefaßten Plan auf Anraten ganz aufzugeben, änderte er ihn doch darauf dahin um, daß er es zwar dabei bewenden ließ, . . .". Hier bricht die Aufzeichnung ab; da sich unter den Büchern, die aus Johanns Nachlaß an die Bibliothek des Kollegiums zu Maros-Vásárhely übergegangen sind, das Exemplar der Inauguraldissertation von Gauss aus dem Jahre 1799 befindet, das dieser Wolfgang zugesandt hatte, so scheint es, als ob ihm der Vater später zwar einige seiner Bücher geschenkt, im übrigen aber die Bestimmung darüber aufrecht erhalten hat.

Der Verlust der Bücher war für Johann gewiß schmerzlich, noch schmerzlicher aber wohl das durch die Testamentsbestimmung kundgegebene Urteil über seine wissenschaftliche Tätigkeit. Trotzdem hat Johann diesmal den Mißmut überwunden und, wie die Briefe an seinen Bruder Gregor (Gergely) beweisen, in den Wochen der letzten Krankheit täglich den „armen Alten" besucht.

Im November hatte diesen der dritte Schlaganfall getroffen. Über Wolfgangs letzte Tage besitzen wir Berichte von zwei Schülern des Kollegiums, die seine Pflege übernommen hatten.

Ludwig Réthy erzählt, daß er sich, als der alte Bolyai seiner nicht bedurfte, mit den Gedichten Aranys beschäftigte. Johann kam, trat auf ihn zu und fragte in höhnischem Ton: „Irgend ein neuer Dichter?" „Ganz recht", sagte Réthy, „kennen Sie ihn nicht, Herr Hauptmann?" „Nein! Hat er vielleicht etwas geschrieben, was nicht schon hundertmal geschrieben wäre? Nun, sehen wir einmal nach!" Er schlug ein Gedicht auf, es war [die Ballade] *Klärchen Zách* [von Johann Arany]. und begann mit geringschätziger Miene zu lesen:

«Weiße Rosen, rote Rosen, blondes Mädchen. . .»

Plötzlich innehaltend machte er eine Bewegung, als ob er das Buch ins Feuer werfen wollte. „Das bestätigt ja meine Behauptung", sagte er, „auch dieser kennt nichts anderes, als Blumen und Mädchen. . . . Allen Kummer und Rückfall der Menschheit hat nur die Dichtkunst verschuldet. Auch dem Alten habe ichs oft gesagt, er solle sie aufgeben. Aber er hat es nicht getan. Er hat sein Leben unnütz gelebt."

Der im Bett ruhig liegende Greis, so schließt Réthy seinen Bericht, hörte diese Kränkung bereits nicht mehr.

Am letzten Tage, dem 20. November, hatte Thomas Vass die Wache. Er hat 40 Jahre später, im Jahre 1896, die Eindrücke geschildert, die sich ihm damals eingeprägt hatten, und wenn auch vielleicht bei der Ausmalung der Einzelheiten die Phantasie nachgeholfen hat, so darf man doch annehmen, daß die beklemmende Stimmung, die über dem ganzen Bericht liegt, der Wirklichkeit entspricht.

„Ich war im Herbst des Jahres 1856 als heranwachsender Jüngling Schüler des Kollegiums, ein *Studenten-Novicius*, wie man einen solchen damals nannte."

„Wolfgang Bolyai, der hochberühmte Professor des Maros-Vásárhelyer Kollegiums, lag damals in seiner Professorenwohnung krank darnieder."

„Diese Wohnung befand sich in unmittelbarer Nähe der Minoriten, in jener wenig bewohnten Gasse, wenn man den Nagyköz damals so nennen durfte, . . . die nachmals nach ihrem einstigen berühmten Einwohner Bolyai-Gasse benannt wurde."

„Die Wohnung, besonders der geräumige Hof, hat in letzter Zeit eine große Umänderung erlitten . . ."

„Zu jener Zeit stand rechts vom Eingang ein zerfallenes Gebäude . . . Daneben war der Holzschuppen nebst anderen Nebengebäuden. Im Hofe befanden sich einige alte Akazienbäume, unter einem davon ein Brunnen mit Wellenantrieb, der noch heute vorhanden ist, dann einige Fliederbüsche, von denen eine Gruppe unmittelbar vor dem Hause eine Laube bildete . . ."

„In einer schmalen, langen Stube dieses Hauses . . . lag der hochberühmte Wolfgang Bolyai krank darnieder."

„Das Bett des Kranken befand sich gerade in der Mitte der Stube. Daneben stand ein unangestrichener Stuhl, darauf Medizinflaschen. Von der Zimmerdecke hing ein steifes, dickes Seil herab mit einem an seinem unteren Ende befestigten Ringe, den der Kranke beinahe immer in der Hand hielt, damit er ihm zur Hilfe diente, wenn er sich im Bette bewegen wollte."

„Dort, unter dem Hoffenster, befand sich auch der aus Fichtenbrettern gezimmerte einfache, unangestrichene Sarg. Diesen ließ der alte Herr aus Vorsicht noch bei seinem Leben, vielleicht vor Jahren, durch irgendeinen Tischler, mit dem er gevatterschaftliche Beziehungen pflegte, anfertigen. Und da im Zimmer außer dem Stuhl kaum noch ein anderes Möbelstück vorhanden war, diente dieser Sarg dem zur Nachtwache bestellten Studenten als Ruhestätte."

„Im anstoßenden Zimmer stand auf einem Gestell eine große schwarze Tafel, welche mit mir unbekannten algebraischen Formeln vollgeschrieben war, die sich auf der Diele von einem Ende bis zum andern fortsetzten. — Dies mag wohl die letzte Rechnung des alten Herrn gewesen sein."

„Am 20. November 1856 war ich durch den Apparitor für die Tageszeit zur Wache bestellt. Es war der letzte Tag des großen Bolyai!"

„Der erste Schnee fiel frühmorgens und bedeckte die Erde mit einer dicken Schicht. Die Witterung hatte einen ganz winterlichen Charakter angenommen."

„Ich war allein im Krankenzimmer. Ich las einen Roman von Jókai. Mit dem Kranken hatte ich nichts zu tun. Medizinen nahm er keine mehr an. Es schien, als wäre er ohne Bewußtsein, als hätte sich, wie die Ärzte zu sagen pflegen, die Agonie eingestellt."

„Da tauchte plötzlich ein Kopf auf, der vom Hofe durch das Fenster hereinguckte. Ich ging hinaus und sprach den Unbekannten an:"

— „Wen suchen Sie?"

— „Ich sehe nach, ob der Alte noch lebt, war seine kurze Antwort."

„An der Stimme ließ sich eine eigentümliche Kühle fühlen."

„Der Unbekannte, von einer durchaus gewöhnlichen untersetzten Statur, hatte das Aussehen eines einfachen Bürgers. Eine unansehliche Gestalt, wie man ihr in der Stadt überall begegnet. Der Kopf mit einem abgegriffenen Hut bedeckt, die grauen, abgenützten Stiefelhosen, sein aus grobem Loden verfertigter Rock, sein ganzes Benehmen und Aussehen bestärkten noch mehr meine Annahme, daß der vor mir Stehende irgendein hiesiger Handwerker, möglicherweise ein Nachbar sei, der bei dem alten Herrn Zutritt hatte."

„Aber ich muß es gestehen, daß der anmaßende, affektiert kühle Ton, mit dem er die obigen Worte aussprach, mich kränkte und aus der Fassung brachte."

„Ich wollte ihn stehen lassen, aber der Unbekannte verstellte mir den Weg und setzte seine Rede fort:"

„Er kann schon sterben, er hat genug gelebt. Er war ein unpraktischer, schlechter Wirt, kein in diese Welt gehörender Mensch. Und wissen Sie, er hielt sich für einen großen Gelehrten, aber, aber was er wußte, nützte weder ihm, noch irgendeinem andern. Wenig Nutzen bot es der Menschheit. Und unterrichten, das konnte er gar nicht."

„Wer mag wohl dieser grobe Narr sein, dachte ich."

„Er bildete sich ein, ein Violinvirtuos, ein Paganini zu sein, fuhr er fort, aber, bei Gott, er hat nicht einmal das ABC dieser Kunst durchlaufen."

„Das ist doch eine Unverschämtheit! — dachte ich, hatte aber nicht den Mut es auszusprechen, denn das unbekannte, unansehliche kleine Männlein begann in meinen Augen zu wachsen. So viel fragte ich dennoch: Wer ist denn der Herr?"

„Ich bin Johann Bolyai, der Sohn dieses alten Mannes! pensionierter Geniehauptmann, setzte er hinzu."

„Auch der geringe Mut, den ich noch besaß, verließ mich auf diese

Worte. Ich hatte nämlich von älteren Studenten vieles über sonderbare, närrische, ja sogar gefährliche Taten gehört, die Johann Bolyai als Hauptmann überall, besonders aber in Wien, vollbracht haben sollte. Man sprach auch darüber, daß Vater und Sohn in einem beständigen wissenschaftlichen Wettstreit miteinander standen. Es ließ sich nicht entscheiden, welcher von ihnen der größere Mathematiker und welcher der größere Musiker sei. Außerdem war der Sohn ein berüchtigter Duellant, ein großer Degenführer, der in Wien nur so mit der Spitze seines Säbels die Ohren der Menschen herabholte. Nach dem Gerücht wurde er vielleicht pensioniert, um Wien von diesem gefährlichen Menschen zu befreien . . ."

„— Nun mein junger Freund, kommen Sie, folgen Sie mir! machen wir einen Spaziergang durch den Garten — sagte er und setzte sich in Bewegung."

„Ich erschrak, es schauderte mich. Keiner ist da, von nirgends ist Hilfe zu erwarten! Ich entschuldigte mich, ich wäre zu dem Kranken bestellt, ich dürfe mich von da nicht entfernen usw. usw."

„Da braucht man Sie nicht mehr, junger Freund! Kommen Sie nur!"

„Ich wagte es nicht, mich weiter zu weigern, und wenngleich mit Unlust und zitternd ging ich, denn der Ton der Aufforderung war ein sehr entschlossener."

„Wir gingen hinunter in den Garten, dessen weit nach unten sich dehnenden, langen Spazierweg wir durchmaßen. Kein angenehmer Spaziergang war es, im frischgefallenen, bis an die Knöchel reichenden Schnee, in dünnen Stiefeln, die mir Jung, der Kollegiumschuster, noch im September für die warmen Herbsttage angefertigt hatte. Hier nahm nun Johann Bolyai nur so aus dem Kopfe das *Tentamen* vor, zergliederte und zerriß mit schonungsloser Strenge dessen Sätze und sprach so sonderbare Dinge von der Unbekannten, worüber ich in meinem ganzen Leben nichts gehört habe."

„Ich kam in eine lächerliche und peinliche Lage. Ich hörte den Vortrag mit großer Ehrfurcht an. Ich staunte entsetzlich und nickte mit dem Kopfe. Ich bestrebte mich, mir das Ansehen zu geben, als verstände ich wenigstens etwas von dem Gesagten. Keineswegs verstand ich auch nur etwas davon! Mein ganzes arithmetisches Wissen beschränkte sich damals und auch später auf einen unermeßlich engen Raum. Ich sah es, ich fühlte es, daß auch er über meine schreckliche Unwissenheit staunte, aber trotzdem sprach er nur weiter."

„Dann ging er über zu der Übersetzung des *Mocnik* von Karl Szász, was er auch mit einer harten Kritik einleitete. Viele Fehler, viele Irrtümer enthalte sie! Ich erinnerte mich, daß er seine Kritik

damit schloß, es sei schade gewesen, das Karl Szász sich an diese Sache gemacht habe."

„Ich hatte von Karl Szász, dessen literarische Tätigkeit ich auch kannte, eine ganz andere Meinung. Ich schwieg aber; um die Welt wagte ich nicht zu sprechen. Und um den jetzt schon ganz in Feuer geratenen Menschen los zu werden, nickte ich auch dazu mit dem Kopfe."

„Glücklich gelangten wir zurück aus dem Garten. Mein Schuhwerk war ganz durchnäßt. Es fröstelte mich, obgleich der Schweiß auf meiner Stirne perlte, die ich fortwährend trocknete."

„Eigentümlich war dieses Frösteln, ein solches, wie ich bisher keines fühlte!"

„Vielleicht bemerkte dies auch Bolyai, oder es tat ihm die mit mir verbrachte Zeit leid. Genug, er grüßte kurz."

„Nun mein lieber junger Freund, Gott segne Sie! und damit entfernte er sich."

„Ich kann es sagen, daß diese Bekanntschaft und diese Begegnung mich ergriffen haben. Den Eindruck, den das Erscheinen und das Wesen dieses eigentümlichen Menschen auf mich machten, kann ich nie vergessen."

„Dies ist die Geschichte von meiner Bekanntschaft und meiner ersten und letzten Begegnung mit Johann Bolyai."

„Jetzt gehe ich täglich an seinem Grabe vorüber, das sich im oberen Teile des Friedhofes, einige Schritte rechts vom Wege, der nach oben führt, befindet. Und wenn ich den rauhen, grauen, kalten Stein erblicke, mit dem die Mathematisch-physikalische Gesellschaft seine Ruhestätte bezeichnete, so fällt mir immer diese Begegnung ein und jene kalte Stimme, die mich beinahe außer Fassung brachte."

„Nachmittags um fünf Uhr löste mich Dionys Szász von der Wache ab, der für die Nacht dazu bestellt wurde. Punkt elf Uhr nachts verließ die unsterbliche Seele Wolfgang Bolyais ihre jämmerliche Staubhülle."

„Während seiner letzten Augenblicke stand mit Dionys Szász Josef Koncz an seinem Bette, und dieser [Koncz] drückte ihm die Augen zu."

„Dann am Morgen ertönten die zwei kleinen Glocken über dem Heim der Musen. Wenn man mit diesen beiden Glocken zugleich läutet, so bedeutet es, daß das Kollegium einen Toten hat."

„Und seitdem diese ehrwürdigen grauen Mauern stehen, hat wahrlich das Kollegium nie einen größeren Toten gehabt."

„Und trotzdem durften im Sinne des Testamentes nur die kleinen Glöckchen ertönen."

„Daraus aber erfuhr zugleich jeder, wer der Tote sei. . . .“

Im folgenden Frühjahr erfüllte ein ehemaliger Schüler Wolfgangs, Ludwig Dicső, dessen letzten Wunsch: er pflanzte beim Grabe einen Apfelbaum; dieses Zeichen der Dankbarkeit und Liebe hat 23 Jahre hindurch allein Wolfgangs letzte Ruhestätte bezeichnet.

Bald nach dem Tode des Vaters, noch im Jahre 1856, hat Johann eine *Lebensbeschreibung* Wolfgangs aufgesetzt. Mit den Ursprüngen des Geschlechts derer v. Bolya beginnend, berichtet er über Wolfgangs Jugend, den Aufenthalt in Göttingen, die Freundschaft mit Gauss und entwirft dann sogleich ein Bild der ganzen Persönlichkeit. Gewiß fehlen darin manche Züge, die man ungern vermißt, allein, wenn man die Schlußsumme von Wolfgangs Wirksamkeit ziehen will, so wird man sagen müssen, daß das Urteil des Sohnes der Wahrheit nahe kommt.

„Seit Kindesbeinen war mein Vater entsetzlich halsstarrig, wollte in allem von dem Bestehenden abweichen; [wenigstens] in Wissenschaften; in Gewohnheiten nicht, denn dazu war er zu ängstlich. Die Neuerungssucht plagte ihn. Kurz, er war ein Hauptsonderling und hätte sich gern ein diktatorisches Ansehen in der Welt gegeben, wenn er, zu seinem großen Ärgernis, nicht frühzeitig wahrgenommen hätte, daß seine Ansichten, worunter in der Tat gar viele neue, vortreffliche waren, keinen Eingang zu finden das Glück hatten. Denn sonderbar: bei all' seinem in seiner Art einzigen, echten Sinn für mathematische Klarheit und Gründlichkeit und seiner Überredungsgabe glückte es ihm, mit gar wenig Ausnahmen, nicht, seinen Ideen, ungeachtet seiner langen, beiläufig ein halbes Jahrhundert gewährt habenden Professurjahren nebst beinahe zahllosen Privatstunden, ja halbe Tage Unterrichtserteilung, Eingang zu verschaffen oder selbe auch nur einigermaßen ins Licht treten lassen, sodaß er in dieser Hinsicht für die Gegenwart beinahe ohne Spur dagewesen ist. Jedoch muß ich gerechter Weise mich selbst ausnehmen, der ich seine Winke, die hauptsächlich in Aufmerksammachen auf die Unvollkommenheit der Wissenschaft und der Welt bestanden, zu benützen vermochte; denn da er seine Ideen selbst vor mir, bis zur Herausgabe seines Werkes im Jahre 1832, sehr geheim hielt, so sah ich mich veranlaßt, ja unwiderstehlich hingewiesen, durch eigene Kräfte zu bewirken, was ich vermochte, und so entstand anfangs meine Raumlehre samt meiner ganz neuen und bis zur Stunde einzigen, richtigen Erklärungsart der Ebene und der Geraden, wie auch den übrigen, zum Teil im Jahre 1832 auch im *Tentamen* erschienenen Lehren.“

XVIII. Kapitel

Johann Bolyai in Maros-Vásárhely (1846—1860): mathematische Untersuchungen der Spätzeit

Im XV. Kapitel haben wir gesehen, wie das schicksalsschwere Jahr 1848 auch für Johann einen neuen Lebensabschnitt herbeiführte. Er war wieder, wie Wolfgang den 13. Juli 1856 an Sartorius von Waltershausen schreibt, „im Schwunge der Arbeit". Auch seine häuslichen Verhältnisse suchte er jetzt zu ordnen. Überdies drängte die Sorge für die Zukunft der Kinder zu einer Entscheidung. Seinen Sohn Dionys, geboren im Oktober 1837, hatte er auf das k. k. Knaben-Erziehungs-Institut zu Hermannstadt gebracht, jedoch im Mai 1847 aus Mangel an Geldmitteln wieder herausnehmen müssen; damit dieser dort auf Staatskosten erzogen würde, wäre die Genehmigung der Militärbehörde zu einer nachträglichen Eheschließung erforderlich gewesen. Im März 1848 hatte sich Wolfgang nach langem Widerstande bereit erklärt, sein Gut in Domáld gerichtlich schätzen zu lassen, damit die zur Heirat Johanns notwendige Kaution durch das künftige Erbteil ergänzt werde. Dann waren die Stürme der Jahre 1848 und 1849 dazwischen gekommen. Über das Weitere wissen wir nur, daß Johanns Eingabe an die Militärbehörde abschlägig beschieden wurde, und er nunmehr im November 1852 einen Vertrag mit Rosalie v. Orbán schloß, wonach er dieser das ihm gehörende Haus Nr. 1004 in Maros-Vásárhely schenkte und außerdem eine Abfindung zahlte, wogegen Rosalie in die Trennung willigte und Unterhalt und Erziehung der Kinder, Dionys und Amalie, übernahm; der zweite Sohn Julius, dessen Echtheit Johann anzweifelte, wird in dem Vertrage nicht erwähnt. Rosalie hat das Haus im Jahre 1856 verkauft und scheint darauf Maros-Vásárhely verlassen zu haben.

Johann wohnte während der letzten drei Jahre seines Lebens, 1857—1860, in einem kleinen Hause der Kalvarienstraße, ganz am Ende der Stadt, dicht bei den Friedhöfen. Die Wirtschaft führte ihm seit 1852 eine Walachin, Juliana Szőts, die ihn bis an sein Ende gepflegt hat. Es wurde immer einsamer um ihn. Als im November 1856 sein Vater starb, hatte er den letzten Menschen verloren, mit dem ihn engere Bande verknüpften.

Nur wer einige Zeit in Siebenbürgen gelebt und Land und Leute kennen gelernt hat, vermag sich eine Vorstellung von der furchtbaren Vereinsamung zu bilden, die Johann seit der Rückkehr in die Heimat umfing; es war in der Tat, wie er einmal sagt, „ein Begräbnis“. Noch vierzig Jahre nach seinem Tode konnte man es merken, welcher Haß, welche Verachtung in Maros-Vásárhely auf dem Namen Johann Bolyai ruhte. In Wolfgang Bolyai ehrte man den berühmten Professor, den Verfasser des *Tentamens*; er war der Stolz des Kollegiums und der Stadt. Aber Johann? Wegen seiner Unverträglichkeit und Duellwut aus dem Heere entfernt, hatte er ein wüstes Leben geführt und war, von den Menschen gemieden, in Dürftigkeit gestorben. Er sollte ein Schriftchen über einen unverständlichen Gegenstand geschrieben haben, das sogar von dem großen Mathematiker Gauss gelobt worden war, aber wahrscheinlich waren das Gedanken, die von seinem Vater herrührten, der das Schriftchen als Anhang zu seinem *Tentamen* veröffentlicht hatte. Bezeichnend für den Ruf, in dem Johann stand, ist die Tatsache, daß sein Jugendfreund Karl Szász, als er sich von 1849 bis 1853 in Maros-Vásárhely aufhielt, Johann nicht aufgesucht hat, wohl nicht aufzusuchen gewagt hat, weil er sich sonst in ein schlechtes Licht gesetzt hätte.

Wenn Johann nur einen einzigen Menschen gehabt hätte, der ihn verstand, der auf seine Gedanken einging, der nach gleichen Zielen strebte! Man wird meinen, Wolfgang sei dies gewesen. Gewiß waren Vater und Sohn bemüht, zu vergeben und zu vergessen, was in den vergangenen Jahren geschehen war. Wie anders klingen jetzt die Briefe als in der Domälder Zeit. „Lieber Sohn“, schreibt Wolfgang im Jahre 1853, „da ich neulich sah, wie weit Du die Schrift hältst, schicke ich Dir ein Augenglas auf Probe. Behalte es, wenn es gut ist. In der [Biblio-] Theka Telekis kann man das kaum zu ertragende, freudlose Leben sanft verträumen, wenn sich nur dem inneren Auge ein äußeres öffnet. In der *Mecanique céleste* des Laplace, die Gauss ein *opus perfectissimum* nennt, und vielen ähnlichen Werken liegt die Quelle tausendjährigen Entzückens.“ Und auch Johann spricht in den Aufzeichnungen aus dieser Zeit vom Vater mit Hochachtung und Verehrung, er stellt den Verfasser „des nicht hoch genug zu schätzenden *Tentamens*“ dem Euklid gleich, er erkennt mit innigem Danke an, wieviel er diesem seinem Lehrmeister schuldet. Freilich scheint es, als ob Vater und Sohn persönliche Berührung, wenn auch nicht vermieden, so doch eingeschränkt haben, in der vielleicht unbewußten Befürchtung, daß es leicht zu neuen Streitigkeiten kommen könnte. Dazu kam, daß Wolfgang, als Johann nach Maros-Vásárhely zurück-

kehrte, das siebzigste Lebensjahr überschritten hatte und die Bürden des Alters zu fühlen begann, daß aber auch Johann leidend war und oft durch Krankheit ans Zimmer gefesselt wurde.

In den Briefen an den Vater klagt Johann über einen bösen Ausschlag, der ihn Tag und Nacht quäle, und dieser, der gern quacksalberte, gab ihm wohlgemeinte Ratschläge. Hiermit hängen wohl auch die Brunnenkuren zusammen, die Johann während der Sommermonate in siebenbürgischen Badeorten durchzumachen pflegte. Seit dem Jahre 1857 ging es mit seiner Gesundheit rasch bergab. Wie er seinem Bruder Gregor (Gergely) meldet, wurde er im August 1857 von einem so heftigen Hexenschuß heimgesucht, daß er fürchtete, für sein Leben ein Krüppel zu bleiben, und wenn ihn auch ein Militärarzt rettete, so war er doch im November noch so schwach, daß ihn die Füße kaum tragen konnten. Im Winter desselben Jahres fing sein rechter Fuß vom Knöchel an zu schmerzen und anzuschwellen, sodaß er Wassersucht befürchtete. In seinem letzten Briefe an Gregor vom 6. November 1859 klagt er, daß ihn seit 15 Monaten ein „tückisches und schmerzhaftes Leiden" befallen habe. Er ist davon nicht wieder genesen. Am 27. Januar 1860 hat ein sanfter Tod seinem langen Leiden ein Ende gemacht. Zwei Tage später hat man dem Hauptmann in Pension auf dem Friedhofe der ev. ref. Gemeinde zu Maros-Vásárhely die letzten Ehren erwiesen und seine irdischen Reste einem namenlosen Grabe übergeben.

Der umfangreiche handschriftliche Nachlaß Johann Bolyais wurde, den Bestimmungen gemäß, der Militärbehörde ausgefolgt und kam, nachdem festgestellt worden war, daß er keine militärischen Geheimnisse enthielt, dem Wunsche Johanns entsprechend an die Bibliothek des Kollegiums zu Maros-Vásárhely; dort wird er in einer großen Kiste aufbewahrt. Nur ein sehr kleiner Teil der Aufzeichnungen stammt aus der Zeit vor 1848, ja man kann sagen vor 1838, denn die Zwischenzeit kommt kaum in Betracht. Aber in den Jahren von 1848 bis 1858 hat Johann mit fieberhaftem Eifer geschafft. Oft mag ihm die Violine, die er noch immer mit Meisterschaft spielte, über trübe Stunden hinweggeholfen haben; allein sie regte seine Leidenschaften auf. Seine wahre Freundin war und blieb die Mathematik. Aus der Mathematik ist auch die Allheillehre hervorgegangen, die während der letzten Lebensjahre seine Gedanken ganz in Anspruch nahm.

In diesem Kapitel soll über die mathematischen Aufzeichnungen aus der Spätzeit, im folgenden über die Aufzeichnungen zur Allheillehre berichtet werden. Von den Bemerkungen zu N. I. Lobatschefskijs

Geometrischen Untersuchungen wird hier abgesehen, da sie bereits im XV. Kapitel ausführlich dargestellt worden sind. Es wird sich empfehlen, dem Bericht einige Ausführungen allgemeiner Art vorauszuschicken.

So vortrefflich der mathematische Unterricht gewesen war, den Johann Bolyai auf der Ingenieur-Akademie in Wien genossen hatte, so war er doch, wie es den Zwecken der Anstalt entsprach, nicht über die Elemente der höheren Mathematik ausgedehnt worden. Daß Johann auf diese Art gerade diejenige mathematische Ausbildung erhielt, die für die Entdeckung der absoluten Geometrie die günstigste war, ist schon im VIII. Kapitel hervorgehoben worden. Es ist erklärlich, daß Johann während der Jahre 1822 bis 1833 die kargen Mußestunden, die ihm der militärische Dienst ließ, der großen Aufgabe widmete, zu deren Lösung er sich berufen fühlte, der Ausbildung der absoluten Geometrie. Als er dann in den Ruhestand versetzt wurde, hätte es ihm nicht an Zeit gefehlt, seine mathematische Bildung durch die Beschäftigung mit den Klassikern zu vervollständigen und sich so das Rüstzeug zu verschaffen, dessen er zu weiteren Forschungen bedurft hätte. Daß er es unterließ, hatte seinen Grund in inneren und äußeren Hemmungen.

Auf die Vereinsamung Johanns ist schon hingewiesen worden. Zu dem Mangel an wissenschaftlichem Verkehr, der die Eigentätigkeit ergänzt und regelt, kam der Mangel an wissenschaftlichen Hilfsmitteln, besonders während der bösen Jahre in Domáld. Diese Hindernisse hätten sich vielleicht überwinden lassen, wenn Johann mit frischem Mute und entschlossenem Willen ans Werk gegangen wäre. Aber seit dem April 1832, seitdem ihm Gauss die Priorität genommen und für seine Entdeckung nicht mehr als ein kühles Wohlwollen gehabt hatte, war etwas in ihm zerbrochen. Mag man auch den Standpunkt von Gauss subjektiv für berechtigt halten, so war doch die Wirkung seines Briefes von den schlimmsten Folgen für Johann, denn dieser befand sich schon seit mehreren Jahren in einem Zustande nervöser Überreizung, er hatte auf den „Göttinger Koloß“ seine ganze Hoffnung gesetzt und vermochte jetzt der starken Enttäuschung keinen Widerstand entgegenzusetzen. Dann kam 1837 bei der Bewerbung um den Leipziger Preis der zweite Schlag, der ihn völlig zu Boden warf.

Als Johann elf Jahre später sich wieder aufraffte, in wilder Wut über das neue Unrecht, das ihm, wie er wähnte, derselbe Gauss angetan hatte, da war es zu spät. Von brennendem Ehrgeiz getrieben, es dem Verhaßten gleich zu tun, ja ihn zu übertreffen, verließ er das Gebiet der Raumlehre, in der Überzeugung, daß ihm, dem Bezwinger der Parallelentheorie, auch auf anderen Gebieten der Mathematik ähn-

liche Erfolge beschieden sein müßten. Leider hat er fast immer schon in der Stellung der Aufgaben fehlgegriffen, so arg fehlgegriffen, daß er sich schon hierdurch den Weg zum Erfolge versperrte. Er wollte zum Beispiel beweisen, daß sich jede algebraische Gleichung algebraisch lösen lasse, daß jede elementare Funktion durch elementare Funktionen integriert werden könne; er wollte endliche Ausdrücke aufstellen, mittels deren sich alle reellen und komplexen Primzahlen darstellen ließen, und ein Verfahren entwickeln, das zur Lösung aller zahlentheoretischer Gleichungen und Systeme solcher Gleichungen führte, und dergleichen mehr. Seine Entwürfe füllen viele Bogen. Sie beginnen mit langen, pomphaften Ankündigungen von großen Entdeckungen; sobald man weiter liest, findet man jedoch nur langwierige Erörterungen, die sich immer mehr verwickeln und verwirren und kein festes Ziel erkennen lassen, wenn auch ab und zu ein Funken des Geistes aufblitzt, der das Meisterwerk des *Appendix* geschaffen hatte. Wohl denen, die einem Achilles oder Siegfried gleich unsterblichen Ruhm erwerben und in der Blüte der Jugend dahinsinken; wehe aber denen, die ein grausames Schicksal dazu verurteilt, nach Vollendung der großen Tat ruhmlos und unfruchtbar dahinzuleben, während sie andere, glücklichere von Sieg zu Sieg schreiten sehen.

Schon im X. Kapitel wurde bemerkt, daß es sich bei den Aufzeichnungen Johanns aus den dreißiger Jahren nicht um druckfertige Ausarbeitungen, sondern um unvollendete Entwürfe mit zahlreichen Lücken, Wiederholungen, Streichungen, Einschaltungen im Texte und auf einzelnen Zetteln handelt. In noch höherem Maße gilt dies für die Zeit zwischen 1848 und 1858, allerdings mit zwei Ausnahmen. Die erste sind die *Bemerkungen über Nikolaus* Lobatschefskijs *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, von denen die wichtigsten Stellen im XVI. Kapitel wiedergegeben worden sind, die zweite ist die *Raumlehre*, von der eine sauber geschriebene, augenscheinlich für den Druck bestimmte Ausarbeitung im Nachlaß vorhanden ist; es war daher möglich, diese Handschrift im zweiten Teile dieses Werkes, S. 237—267 wortgetreu abzudrucken. Um so schlimmer steht es mit dem Reste. Hier bedient sich Johann zahlreicher ungebräuchlicher mathematischer Zeichen, deren Bedeutung oft nur mühsam ermittelt werden konnte; zum Teil rühren sie von Wolfgang her, der im *Tentamen*, ganz besonders aber in dem Werke *Az arithmetica eleje* (1830) seiner Neuerungssucht freien Lauf gelassen hatte, zum Teil hat sie Johann selbst erfunden, der schon im *Appendix* eine bedenkliche Neigung nach dieser Seite zeigt. Dazu kommt eine weitere

befremdliche Eigentümlichkeit, die sich bei Johann in der Spätzeit entwickelt hatte, daß nämlich den meisten Worten zwei, drei, ja bis zu einem Dutzend sinnverwandte Worte hinzugefügt werden; eine Erklärung hierfür wird im nächsten Kapitel gegeben werden. Die Lösung der Aufgabe, aus solchen Aufzeichnungen einen Text herzustellen, der die beiden Forderungen erfüllt: den Sinn der Vorlage getreu wiederzugeben und sich bequem lesen zu lassen, war nicht leicht; in manchen Fällen mag sie nicht gelungen sein, aber es mußte doch der Versuch dazu gemacht werden. Proben von Textstücken in der ursprünglichen Form findet man in den Belegen, die hinter der Lebensbeschreibung zusammengestellt sind; sie werden es erklärlich machen, daß von einer wörtlichen Wiedergabe abgesehen wurde.

In seiner Allheillehre, auf die wir im nächsten Kapitel eingehen werden, hat Johann alles das zusammenfassend darstellen wollen, wovon wir ein sicheres Wissen besitzen. Den Hauptteil sollte die Mathematik bilden. Den Plan zu einer solchen enzyklopädischen Darstellung der Mathematik hatte Johann schon früh gefaßt. „Als ich ihm [dem Vater] eröffnete“, erzählt Johann und bezieht sich dabei auf einen Brief, den er als Leutnant an Wolfgang geschrieben hatte, „daß ich die Absicht hätte, die ganze Mathematik von Anfang bis zu den erreichbaren äußersten Regionen in möglichster Klarheit und Vollkommenheit darzustellen [da antwortete er:] »Ich wünsche Glück! Ein heiliger Gedanke! Dies kann eine Frucht werden, welche die Zeit schon lange in ihrem Mutterleibe trägt, und es ist eines Menschen Leben wert. Du wirst viele Zeit verbringen, nur selbst in den elementaren Teilen, ich weiß es von mir selbst, obgleich Du ganz anders ausgerüstet bist.«“ Diese Äußerungen werden bestätigt durch einen Entwurf zu Titel und Vorwort eines Werkes *Reformation der Elemente der Mathematik*, der in der Zeit zwischen März 1832 und Juni 1833 abgefaßt ist, weil Johann sich darin als Capitain-Lieutenant im k. k. österreichischen Genie-Corps bezeichnet. Das Werk sollte aus zwei Teilen bestehen. „Der erste Teil zerfällt seinem Wesen nach von selbst in vier scharf von einander abgesonderte Hauptteile: die *Zahlen-Lehre*, die *Zeit-Lehre*, die *Raum-Lehre*, die *Bewegungs-Lehre*.“ Von dem zweiten Teil wird gesagt, daß er „auf die Form der Wissenschaft reflektiert und somit die *Logik*, *Metaphysik*, den *Geist* und die *Kritik* davon behandelt und besonders die *Notwendigkeit* und *Einzigkeit* der gewählten Form des ersten Teiles zeigt.“

In den späteren Entwürfen ist die Einteilung eine etwas andere. Den Anfang sollte die „Lehren-Lehre“ bilden, „bei der die Art der Mathematik nicht in Betracht kommt“. Gemeint ist eine Darlegung des

logischen Inhalts der mathematischen Untersuchungen; Ausführungen hierüber haben sich im Nachlaß nicht vorgefunden.

Es folgt die „Gruppen-Lehre". Unter einer Gruppe versteht Johann eine endliche Menge von Dingen, bei der nur die Ordnungsverhältnisse betrachtet werden; der neuere Begriff der Gruppe ist ihm fremd, es handelt sich also im Wesentlichen um Kombinatorik. Hierüber sind nur wenige und unbedeutende Aufzeichnungen vorhanden.

Der nächste Abschnitt betrifft die „Zahlen-Lehre". Unter Zahl versteht Johann stets eine *ganze* Zahl, die positiv oder negativ sein darf, sodaß also die höhere Arithmetik gemeint ist. Schon als Jüngling hatte sich Johann eingehend mit den *Disquisitiones arithmeticae* von Gauss beschäftigt. „Deine Polygonen-Theorie", schreibt Wolfgang am 20. Juni 1831 an Gauss, „war mein Sohn willens, deutsch den kleineren Köpfen etwas zugänglicher herauszugeben, weil es ihn ärgert, daß sie nicht so bekannt ist, wie er es wünschte: allein ich sagte ihm, daß ich von jemandem (weiß nicht, von wem) vernommen habe, daß Du es besonders herausgegeben hast; welches ich auch zu sehen wünsche." In den dreißiger Jahren war Johann, wie im X. Kapitel berichtet wurde, von Wolfgang zu zahlentheoretischen Untersuchungen angeregt worden. Auch in der Spätzeit hat er sich mit der Zahlenlehre beschäftigt, aber der Erfolg war nur gering, und es verlohnt sich nicht, auf seine Aufzeichnungen genauer einzugehen.

Dem Vorgang seines Vaters folgend suchte Johann die in dem Begriff einer stetig veränderlichen Größe liegenden Schwierigkeiten dadurch zu überwinden oder besser zu umgehen, daß er zur Darstellung solcher Größen das Fließen der Zeit benutzte. Daher wird der Zahlen-Lehre eine „Zeit-Lehre" zugeordnet, in der die Algebra und die Analysis Platz finden. Hierher gehört auch die Lehre von den imaginären Größen, die Johann in der *Responsio* vom Jahre 1837 in eigenartiger Auffassung dargestellt hatte. Was sich in den Aufzeichnungen der Spätzeit auf die Zeit-Lehre bezieht, ist im Wesentlichen bereits in dieser *Responsio* vorgebildet. Johann hat auch eine erweiterte und verbesserte Darstellung seiner Lehre von den imaginären Größen geben wollen, die er an Bedeutung der absoluten Geometrie gleich stellt. Was er bringt, sind jedoch nur weitschweifige Ausspinnungen von Gedanken, die er früher knapp, oft allzu knapp dargestellt hatte; sachlich Neues ist darin kaum zu finden. Wie es mit seinen umfangreichen Untersuchungen zur Lehre von den algebraischen Gleichungen steht, ist bereits gesagt worden.

Wir kommen zur „Raum-Lehre", dem Gebiet, auf das Johann bis in die letzten Jahre seines Lebens hinein die meiste Zeit und Mühe

verwandt hat. Wenn sich auch nicht leugnen läßt, daß die Erfolge den Anstrengungen nicht entsprachen, ja daß Johann auf Irrwege geriet und zeitweise die Folgerichtigkeit der absoluten Geometrie in Zweifel zog, so bieten seine Aufzeichnungen doch so viel Bemerkenswertes, daß, wenn Johanns Leistungen die richtige Würdigung finden sollen, ein Bericht darüber notwendig ist.

Ehe wir dazu übergehen, möge noch darauf hingewiesen werden, daß den Schluß der Mathematik die „Bewegungs-Lehre" bilden sollte. Auch hier beabsichtigte Johann, wohl durch die *Theoria motus corporum coelestium* von Gauss angespornt, als Reformator aufzutreten, und versprach, eine vollkommene Lehre von den Bewegungen der Planeten und der Monde zu geben; wie er sich die Durchführung im Einzelnen dachte, darüber gibt der Nachlaß keinen Aufschluß.

Im Jahre 1833 verabschiedet und in die Heimat zurückgekehrt hatte Johann die ihm zu teil gewordene Muße dazu benützt, den *Appendix*, der nur einen Teil der Ergebnisse seiner Untersuchungen enthielt, zu einer *Raumlehre* auszugestalten; das zeigen verschiedene Entwürfe und besonders ein umfangreiches *Vorwort zur Raum-Lehre* aus der Zeit um 1834, das in den Kapiteln X und XI wiederholt erwähnt worden ist, weil Johann darin eingehend darlegt, wie er zur Entdeckung der absoluten Geometrie gelangt sei. Dann kommt eine lange Pause. Erst um das Jahr 1850 hat Johann die Arbeit an der *Raumlehre* wiederaufgenommen.

Daß er das Werk nicht vollendete, hatte seinen Grund schon in den Schwierigkeiten, die sich der Veröffentlichung entgegenstellten. Den Druck auf eigene Kosten zu bewerkstelligen, ging über die Kräfte eines auf ein bescheidenes Ruhegehalt angewiesenen ehemaligen Hauptmanns. Sich nach Deutschland, an Gauss zu wenden, das verboten ihm die trüben Erfahrungen, die er im Jahre 1832 gemacht hatte. So geriet er auf den Gedanken, hochgestellte Personen seines Vaterlandes anzugehen. Verschiedene Entwürfe zu Eingaben um Unterstützung seines Unternehmens haben sich im Nachlaß vorgefunden. Ob sie wirklich abgesandt worden sind, ist zweifelhaft; Erfolg haben sie jedenfalls nicht gehabt.

Aber auch unter günstigeren Verhältnissen wäre die *Raumlehre* wohl ein Bruchstück geblieben. Johanns schöpferische Kraft war erlahmt; im wesentlichen ist er über die Gedanken aus den dreißiger Jahren nicht hinausgekommen. Geblieben war ihm indessen die Schärfe der Kritik, und in hellen Stunden hat er die schwachen Stellen im Aufbau seiner *Raumlehre* zu erkennen vermocht. Er hat sie erkannt, hat

aber nicht mehr die Kraft besessen, die Lücken auszufüllen und das Werk zu Ende zu führen. Allein auch diese Kritik war eine erhebliche Leistung; hat Johann doch, wie noch genauer dargelegt werden wird, eine Einsicht vorausgenommen, deren Wichtigkeit erst ein Menschenalter später offenbar geworden ist.

Es scheint, als ob Johann der eigentlichen Raumlehre, die er nach dem Muster der Elemente EUKLIDS darstellen wollte, erläuternde Bemerkungen beizugeben beabsichtigt hat; wenigstens sind der Handschrift der drei ersten Teile der *Raumlehre* auf einzelnen Zetteln verschiedene Bruchstücke solcher Bemerkungen beigelegt. Von besonderer Bedeutung sind die Bemerkungen, in denen Johann allgemeine Betrachtungen über die Gestalt der Kurven und Flächen anstellt.

Die Linien werden eingeteilt in *einfache* und *knotige*. „Eine *einfache Linie* ist nur jeder solcher Verein von Punkten, worin von dessen jedem Punkte zu jedem anderen Punkte desselben entweder nur ein von einem materiellen Punkte durchlaufbarer Weg da ist oder stets nur zweierlei Wege vorhanden sind." Dann gilt der Lehrsatz: „Jedes Stück einer einfachen Linie ist auch eine einfache Linie, von einer knotigen aber nur dann wieder eine einfache Linie, wenn entweder kein Knoten darein fällt oder an keinem darein fallenden Knoten mehr als zwei Wege vorhanden sind".

„Eine *einfache Fläche*", fährt Johann fort, „heiße nur jeder Punktverein, worin aus jedem Punkte V fortlaufende Linien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, . . . , (wenn man will, nur denselben Punkt V gemeinsam habende da sind, wobei einem jeden Punkte A einer jeden dieser Linien ein, aber auch nur ein Punkt der übrigen Linien und umgekehrt entspricht, und wo alle zu einem Punkte A von $\mathfrak{A}$ gehörigen Punkte B, C, . . . eine einfache Linie bilden und ein Anfangsstück jeder Linie von V in den Inbegriff $\mathfrak{A} * \mathfrak{B} * \mathfrak{C}$ . . . fällt."

Nunmehr stellt sich Johann die Aufgabe, die verschiedenen Arten der einfachen Flächen aufzuzählen. Er unterscheidet zunächst *volle* und *durchlöcherte* Flächen. Aus den durchlöcherten Flächen gewinnt er neue Arten voller, einfacher Flächen. „Man kann aus einer beliebigen einfachen Fläche eine beliebige Anzahl Löcher herausheben, daselbst Röhren aufsetzen und diese paarweise zusammenführen. So ist allgemeinst die einfache Fläche beschaffen". — Johanns Behauptung beruht allerdings nur auf einer Intuition, denn daneben ist bemerkt: „Einen Beweis untersuchen!"

In diesem Zusammenhange ist es auch bemerkenswert, daß Johann sich mit der EULERschen Relation zwischen den Anzahlen der Ecken, Kanten und Seitenflächen eines Vielflachs beschäftigt und nach dem Be

reiche ihrer Gültigkeit gefragt hat. „Der Eulersche herrliche Satz", sagt er, „von der Anzahl der Seitenflächen, Kanten und Spitzen eines jeden Polyeders ist zwar schon lange, jedoch, wie es scheint, nicht in gehöriger Allgemeinheit bewiesen, da nicht jederlei Polyeder-Relation durch sukzessive Stutzung von Pyramiden entsteht. Also neu angreifen!" An einer anderen Stelle behauptet er, daß er „den Beweis der Eulerschen Relation auch für ringförmige Polyeder und Ebenen-Räume mit Höhlungen" gefunden habe. Was Johann damit gemeint hat, ist nicht ganz klar, und es muß dahingestellt bleiben, ob er in der Tat gewußt hat, in welcher Weise die Eulersche Relation für Vielflache von beliebigem Zusammenhang abzuändern ist, damit ihr allgemeine Gültigkeit zukommt.

Der erste Teil der *Raumlehre* trägt den Titel „Die Grundlagen". Nachdem der *Punkt* als teilloser Ort erklärt ist, wird als einfachstes geometrisches Gebilde der *Ring* $\bigcirc ABC$ gewonnen; er ist der Verein aller Punkte, deren jeder zu dem Inbegriff der Punkte A und B (in Zeichen zu $A * B$) dieselbe Lage hat wie der Punkt C. Alle diejenigen Punkte C, bei denen $\bigcirc ABC$ ein Punkt ist, bilden die (absolute) *Gerade* $AABB$. Liegt dagegen C außerhalb $AABB$, so wird als Grundsatz aufgestellt, daß $\bigcirc ABC$ eine einfache, gleichförmige, geschlossene Linie sei.

Ein weiterer Grundsatz besagt, daß es, wenn C außerhalb $AABB$ liegt, zu jedem Punkte D einen Punkt E gebe, der in Ansehung von $A * B * C$ mit D *symmetrisch* liegt; dieser Punkt E heißt das *Bild* von D für $A * B * C$. Der Verein aller Punkte D, die für $A * B * C$ ihr eigenes Bild sind, wird die (absolute) *Ebene* $ABBC$ genannt und sogleich der Grundsatz aufgestellt, daß die Ebene eine einfache, fortlaufende, gleichförmige Fläche sei, die den Raum in zwei Stücke teilt.

Endlich wird die *Runde* $\bigcirc AB$ als der Verein der Punkte erklärt, deren jeder C zu der Mitte A dieselbe Lage wie B hat, sodaß also $A * C$ gleich $A * B$ ist, und, nachdem noch gefordert ist, daß es für zwei Orte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{C}$ gleich $\mathfrak{A}$ ist, stets wenigstens einen Ort $\mathfrak{D}$ gebe, so daß $\mathfrak{C} * \mathfrak{D} = \mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ wird, wird bewiesen, daß die Runde eine einfache, gleichförmige, den Raum in zwei Stücke teilende Fläche ist.

Nunmehr versucht Johann zu zeigen, daß die so erklärten Gebilde: Ring, absolute Gerade, absolute Ebene, Runde dieselben Eigenschaften besitzen, die in der gewöhnlichen Geometrie der Kreislinie, der Geraden, der Ebene, der Kugeloberfläche beigelegt werden, zum Beispiel, daß eine Ebene durch drei ihrer Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, eindeutig bestimmt ist, daß eine Gerade, die zwei Punkte

mit einer Ebene gemeinsam hat, ganz in diese fällt, daß eine Kugeloberfläche durch eine Halbgerade (Strahl) aus ihrer Mitte in einem und nur einem Punkte geschnitten wird usw. Hierbei ist er jedoch auf Schwierigkeiten gestoßen; denn hinter den betreffenden Lehrsätzen ist in der Handschrift ein leerer Raum gelassen. Der Grund war der, daß bei dem von Johann gewählten Wege über die Stetigkeit und Gleichförmigkeit der Geraden nichts ausgesagt werden kann; hierauf deuten Randbemerkungen von Johann selbst.

Den Schluß des ersten Teiles bilden Sätze über das Senkrechtstehen von Geraden und Ebenen, bei denen sich der Begriff des Bildes als sehr nützlich erweist. Johann begegnet sich hier mit den Bestrebungen der neuesten Zeit, die elementare Geometrie einfacher und durchsichtiger zu gestalten, indem von vornherein der Begriff der Spiegelung an einer Geraden und einer Ebene eingeführt wird.

Die Verwandtschaft aller dieser Betrachtungen mit den Gedanken von Wolfgang Bolyai liegt auf der Hand. Unterscheidend ist besonders, daß die Kugelfläche bei Johann zurücktritt, während diese bei Wolfgang den Ausgangspunkt bildet und aus ihr allein Ring, Ebene und Gerade hervorgehen. Johann war damit nicht einverstanden. „Die Gerade aus der Kugelfläche ableiten zu wollen", sagt er einmal, „ist nicht nur unzulänglich, sondern auch ganz unnatürlich und nichtig; denn obschon der Begriff der Kugel in der Tat einfacher ist und selbst ihre Erzeugung als einfacher als jene der Ebene angesehen werden kann, so kann man doch nur sagen, daß $AABB$ in jeder Runde um A einen Punkt *habe*, ohne irgend einen solchen Punkt selbst wirklich zu *finden*".

Hierin kommt ein Gedanke zum Ausdruck, auf den Johann großen Wert gelegt hat; im zweiten Teile der *Raumlehre*, zu dem wir jetzt übergehen, beschäftigt er sich nämlich mit der Frage, wie man Orte *finden* könne.

Die Überschrift „Konstruktions-Lehre" wird von Johann sogleich folgendermaßen erläutert: „Verschiedenen Aufgaben über die Erzeugung der Grund-Orte, wovon man bisher nur eine dunkle Idee hatte und das Dasein ahnte, ohne es selbst beweisen, viel weniger dieselben Orte wirklich *a priori* finden zu können". Worauf es ankommt, hat er auf einem beiliegenden Zettel ausführlich auseinandergesetzt.

„Gefunden (konstruiert) wird ein Ort stets nur durch Operationen, deren jede in der Drehung eines schon gefundenen Ortes um zwei Punkte entsteht, wobei nur folgende zwei *Forderungen* zu berücksichtigen sind:

1) Daß der Weg nur jedes um zwei Punkte umgedrehten bereits Gefundenen ebenfalls als gefunden angesehen werde;

2) Daß nur der Schnitt zweier schon Gefundenen als gefunden zu betrachten sei."

„Es wird nämlich die Drehung um zwei Punkte, welche ursprünglich selbst die einzig definierbare Bewegung ist und die einfachste, in der Ausübung sicherste Bewegung bleibt, bei der Erzeugung in der Raum-Lehre allein zugelassen."

Vielleicht ist für diese Auffassung Mascheronis *Geometria del compasso* (Pavia 1797) nicht ohne Einfluß gewesen. Auf einem Zettel findet sich nämlich folgende Bemerkung: „Mascheronis Werk: *Geometria del compasso* beurkundet unstreitig ein sehr fruchtbares Genie und macht Epoche in der geometrischen Konstruktions-Lehre. Aber jedem das Seine! Die vorliegende Lehre hat folgende Vorzüge:

1) Daß hierselbst die Annahme oder Voraussetzung einer Ebene nicht verlangt wird,

2) Daß die Beschreibung eines Kreises nicht um einen Mittelpunkt in einer Ebene, sondern stets durch Drehung um zwei fixe Punkte, somit mit gehöriger Gleichförmigkeit und Zierlichkeit bewirkt wird,

3) Daß hier auch Euklids zweite Aufgabe [von einem gegebenen Punkte eine Strecke, die einer gegebenen gleich ist, zu ziehen], welche Mascheroni, als in der Tacquetschen Ausgabe fehlend, nicht behandelt hat, [gelöst wird.]"

Der dritte Teil der *Raumlehre* betrifft die Eigenschaften von Winkeln und Vielecken. Die Darstellung beginnt mit der Erklärung des ebenen Winkels als eines durch zwei, von einem Punkt ausgehenden Halbgeraden begrenzten Stückes der Ebene. Darauf wird die Lehre von der Messung der Winkel mittels Kreisbogen eingehend begründet. Jede von Geraden begrenzte Figur heißt Vieleck. Bei dieser allgemeinen Auffassung bedarf die Frage, was unter den Winkeln eines Vielecks zu verstehen sei, einer ausführlichen Untersuchung. Mit derselben Sorgfalt wird die Zerlegung eines Vielecks in eine endliche Anzahl von Dreiecken behandelt. Es folgen elementare Sätze über Beziehungen zwischen Winkeln und über die Winkel im Dreieck; für den Satz von der Gleichheit der Scheitelwinkel werden nicht weniger als sieben Beweise gegeben. Damit bricht der Entwurf ab; der dritte Teil der *Raumlehre* ist unvollendet geblieben.

Mit dem vierten Teil der *Raumlehre* hätte eine neue, erweiterte und verbesserte Darstellung der Untersuchungen beginnen müssen, die Johann in dem *Appendix* veröffentlicht hatte. Daß sich nur Bruchstücke von Aufzeichnungen, die diesen Teil betreffen, im Nachlaß gefunden haben, aber keine Ausarbeitung wie bei den drei ersten Teilen,

erklärt sich vielleicht daraus, daß Johann in den späteren Jahren an der Widerspruchslosigkeit seiner absoluten Geometrie irre geworden war.

Daß in ein und derselben *Ebene* das System S der absoluten Geometrie „ewig konsequent" sei, erhelle, so meint Johann, aus der Gleichwertigkeit der absoluten Geometrie der Ebene mit der sphärischen Geometrie für einen imaginären Radius der Kugel. Es wäre jedoch denkbar, daß sich im *Raume* ein innerer Widerspruch von S herausstellte. Um dies zu ergründen, untersucht Johann zunächst ein *System von vier Punkten im Raume*, die die Ecken eines Tetraeders $abcd$ bilden. Durch die 6 Kanten a, b, c, d, e, f sind zunächst die 12 Winkel $ab, ac, \ldots$ bestimmt, und daraus ergeben sich die 6 „zweiebnigen" Winkel des Tetraeders, jedoch jeder Winkel auf zwei verschiedene Arten. „Es ist also zu untersuchen, ob daraus eine Bestimmung von i erfolge oder nicht". Indem Johann zur Abkürzung $\cos \frac{1}{2} a$ mit a, $\sin \frac{1}{2} a$ mit A bezeichnet, erhält er die Gleichungen:

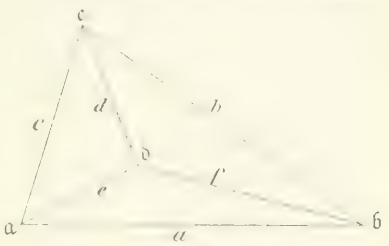


Fig. 18.

$$\cos ac = \frac{b - ac}{AC}, \quad \cos df = \frac{b - df}{DF},$$

$$\cos ae = \frac{f - ae}{AE}, \quad \cos de = \frac{c - de}{DE},$$

$$\cos ce = \frac{d - ce}{CE}, \quad \cos fe = \frac{a - fe}{FE}.$$

Hieraus folgen für den Winkel zwischen den durch a und e, e und c bestimmten Ebenen, den er aec nennt, die beiden Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \cos aec = \frac{\cos ac - \cos ae \cos ce}{\sin ae \sin ce} = \frac{\frac{b - ac}{AC} - \frac{f - ae}{AE} \cdot \frac{d - ce}{CE}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{f - ae}{AE}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{d - ce}{CE}\right)^2\right]}}$$

$$\text{II.} \quad \cos aec = \frac{\cos df - \cos de \cos fe}{\sin de \sin fe} = \frac{\frac{b - df}{DF} - \frac{c - de}{DE} \cdot \frac{a - fe}{FE}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{c - de}{DE}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{a - fe}{FE}\right)^2\right]}},$$

deren rechte Seiten übereinstimmen müssen, wenn S auf keinen Widerspruch führen soll. Die Ausführung der Rechnung ergibt in der Tat die Identität beider Ausdrücke. Das Entsprechende gilt für die fünf anderen Winkel, sodaß demnach „durch Betrachtung von vier die Spitzen eines Tetraeders bildenden Punkten sich nichts ergibt, da auch dann

Konsequenz herrscht, man möge wie immer dieselben dadurch bestimmten Größen ausdrücken aus das Ganze bestimmenden Größen".

„Ver- und untersuchen wir also", fährt Johann fort, „ein *System von fünf Punkten*". Wird zu den Punkten a, b, c, d ein fünfter e hinzugefügt, der nicht mit drei von ihnen in einer Ebene liegt, so ist die Lage von e durch die Länge der Verbindungslinien ae, be, ce, die Johann mit *k, h, i* bezeichnet, vollständig bestimmt, und es müssen sich daher durch die 9 Größen *a, b, c, d, e, f, h, i, k* die Länge *g* der Verbindungslinie de und die in der Figur vorhandenen 30 Dreiecks- und 30 Ebenenwinkel ausdrücken lassen. Dabei stellt sich wiederum heraus, daß manche dieser Stücke sich auf zwei oder mehr verschiedene Arten berechnen lassen, und es fragt sich, ob unter Anwendung der absoluten Trigonometrie stets derselbe Wert herauskommt; im besonderen ergibt sich eine dreifache Bestimmung von *g*; denn sobald die 60 Winkel bekannt sind, genügen hierzu je zwei der Winkel *eg, dg, fg*.

Mit dem *System von 5 Punkten* hat sich Johann aufs eingehendste beschäftigt, wie es scheint, in der sicheren Erwartung, auf diesem Wege einen Beweis des XI. Axioms zu erlangen. Eine Zeit lang hat er sogar geglaubt, das Ziel erreicht zu haben, denn er erhielt einmal keine Identität. „Somit ist *S* falsch", ruft er triumphierend aus und beginnt mit der Abfassung einer Schrift, deren Titel lautet:

„Beweis des bis nun auf der Erde immer noch zweifelhaft gewesenen, weltberühmten, und, als der gesamten Raum- und Bewegungslehre zum Grunde dienend, auch in der Tat allerhöchstwichtigen 11. Euklidschen Axioms. Von Johann Bolyai von Bolya, k. k. Genie-Stabshauptmann in Pension."

Die Einleitung — weiter ist Johann nicht gekommen — enthält wichtige biographische Notizen über seinen Vater und ihn selbst; Johann sagt dabei, daß sein Vater „die Briefe von Gauss soeben an die Universität Göttingen zurückgesandt" habe, somit ergibt sich als Abfassungszeit der Juli 1856.

Später erkannte Johann, daß er sich getäuscht hatte, weil ein Rechenfehler vorlag, und daß also „in dem System von 5 Punkten Konsequenz herrscht". „Auf diese Weise kann man," meint er, „zu einem System von 6 Punkten übergeben; allein die Mühseligkeit der Arbeit bei der Auflösung eines Systems von 6 Punkten ist wohl imstande, selbst den mutigsten Rechner stutzig zu machen".

Daß dieses Verfahren ins Endlose führt, hat Johann selbst erkannt, denn in Aufzeichnungen aus der allerletzten Zeit macht er nur Wahrscheinlichkeitsgründe zugunsten der Euklidschen Geometrie Σ geltend: „Insofern, wenn *S* logisch denkbar ist, auch Σ es ist (als besonderer

Fall), nicht aber umgekehrt S, scheint Σ mehr für sich zu haben, obschon keineswegs ausgemacht".

Es ergibt sich somit die merkwürdige Tatsache, daß Johann Bolyai niemals zu einer Gewißheit darüber gelangt ist, ob S *im Raume* auf einen Widerspruch führt oder nicht. In der Tat liegt hier eine Schwierigkeit vor, die zu überwinden ganz andere Mittel erforderlich sind, als sie ihm zu Gebote standen. Daß er jedoch die Frage, ob sich das XI. Axiom durch räumliche Konstruktionen beweisen lasse, überhaupt aufgeworfen hat, macht seinem Scharfsinn Ehre und verdient um so mehr anerkannt zu werden, als er dadurch über Lobatschefskij hinausgegangen ist; dieser bemerkt zwar, daß die imaginäre Geometrie auf keinen Widerspruch führen könne, weil die Gleichungen zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks in die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie übergehen, wenn man die Seiten als imaginär ansieht, beschränkt sich jedoch bei der Frage der Widerspruchslosigkeit seiner imaginären Geometrie stets auf die *Ebene*.

Von den Methoden, die später zum Beweise der Widerspruchslosigkeit der nichteuklidischen Geometrie benutzt worden sind, geht die erste auf Gauss und Riemann zurück. Der Raum wird als eine dreifach ausgedehnte stetige Zahlenmannigfaltigkeit aufgefaßt, auf die sich das widerspruchsfreie Verfahren der analytischen Geometrie anwenden läßt. Ein Widerspruch in der absoluten Geometrie würde also einen entsprechenden Widerspruch in der Arithmetik zur Folge haben. Die zweite Methode beruht auf dem Gedanken von Cayley, daß sich die Geometrie projektiv begründen lasse, wenn man statt des imaginären Kugelkreises eine beliebige Fläche zweiter Ordnung als absolutes Gebilde zugrunde legt. Er ist zuerst von F. Klein durchgeführt worden. Ein Widerspruch in der absoluten Geometrie würde hiernach einen entsprechenden Widerspruch in der euklidischen Geometrie nach sich ziehen.

Wie heikel die hier berührte Frage ist, geht aus den Einwendungen hervor, die gegen die beiden soeben angedeuteten Methoden erhoben worden sind. Die Berechtigung, den Raum als Zahlenkontinuum anzusehen, kann nach dem heutigen Stande der Wissenschaft nur dadurch erwiesen werden, daß man zunächst die elementare Geometrie als solche bis zur Einführung von Koordinaten entwickelt. Bei dem von Klein benutzten Verfahren aber muß gefordert werden, daß die projektive Geometrie unabhängig vom Parallelenaxiom aufgebaut wird. Man wird daher sagen dürfen, daß nur die direkte Methode, die Johann Bolyai im Auge hatte, nämlich die Durchführung der absoluten Geometrie, einen vollständig befriedigenden Beweis für die Widerspruchslosigkeit der absoluten Geometrie und damit zugleich für die Unbeweisbarkeit

des Parallelenaxioms zu liefern vermag. Auf die Untersuchungen, die Hilbert, Pasch, Peano, Schur, Veronese und andere in diesem Sinne angestellt haben, kann hier nicht eingegangen werden; so große Fortschritte dabei auch erreicht worden sind, so bleibt doch den künftigen Mathematikern noch ein weites Feld für ihre Forschungen.

Bei der Bearbeitung der *Raumlehre* ist Johann auch auf eine Frage eingegangen, zu deren Behandlung ihn, wie so oft, sein Vater angeregt hatte. Die Untersuchungen Wolfgangs über die *endliche Gleichheit von ebenen Flächenstücken* sind bereits im V. Kapitel besprochen worden; es lag nahe, die entsprechende Frage für Stücke des Raumes zu stellen, und Wolfgang hat das auch im zweiten Bande des *Tentamens* getan. Dort heißt es: „Ob eine beliebige dreiseitige Pyramide durch endliche Gleichheit auf ein Prisma zurückgeführt werden kann oder nicht kann, das ist (bis jetzt) noch nicht klar gestellt worden.“ „Mein Vater“, erzählt Johann, „hat den Gedanken gehabt, überall, wo es nur möglich ist, die endliche Gleichheit zu zeigen, und hat mich schon in früher Jugend, freilich nur durch einige kurze Aufmerksam-Machungen, auf diesen Begriff hingewiesen... Die Aufgabe der Pyramide, namentlich eine Nachweisung der endlichen Gleichheit jeder zweien gleichen dreiseitigen Pyramiden und dadurch jeder zwei [gleichen] Ebenenräume oder Polyeder war mir eine der sprödesten, den hartnäckigsten Widerstand geleistet habend, und machte mir unglaubliche Schwierigkeiten. Ich gestehe, daß bezugs Bändigung der Pyramiden aller meiner Bemühungen und angewandten Scharfsinns ungeachtet [zwar] eine Menge schöner und Vorbereitungs-Entdeckungen in der Raumlehre.... Durch die ganz eigene, höchste Zierlichkeit der Aufgabe gereizt habe ich ihr nicht wenige Zeit gewidmet, behufs des Hauptzwecks aber stets völlig fruchtlos. Wer sich davon zu überzeugen und seine Kräfte kennen zu lernen wünscht, möge sich der daran machen.“ In der Tat beziehen sich dicke Stöße von Papieren auf die genannte Frage; da Johann jedoch nach einem Beweise der endlichen Gleichheit volumengleicher dreiseitiger Pyramiden suchte, so ist es erklärlich, daß alle seine Bemühungen vergeblich waren. Vielleicht würde es ihn getröstet haben, wenn er erfahren hätte, daß ein größerer als er, Karl Friedrich Gauss, die Aufgabe ebenfalls nicht bezwingen konnte. Daß dieser sich mit ihr beschäftigt hat, zeigt ein Brief an Gerling vom 17. April 1844. Durch die Untersuchungen von Bricard, Sforza und Dehn ist jetzt bewiesen worden, daß volumengleiche Pyramiden nicht endlich-gleich zu sein brauchen.

XIX. Kapitel

Die Allheillehre Johann Bolyais

Wer die *Allheillehre* Johann Bolyais richtig beurteilen will, muß sich von vornherein vor dem naheliegenden Irrtum hüten, als ob es sich dabei um ein sozialistisches System handle. Die Allheillehre ist vielmehr eine neue Religion, die sich, wie andere Religionen, in weiten Grenzen den verschiedensten Formen des staatlichen und gesellschaftlichen Lebens anzupassen vermag. Daß Johann jeder Auseinandersetzung mit den herrschenden Religionen aus dem Wege geht, ist richtig; er vermeidet aber überhaupt jede Kritik des Bestehenden und beschränkt sich darauf, seine Lehre darzulegen, in der Meinung, daß ein jeder, der diese kennen lerne, sich ihrer Überzeugungskraft nicht entziehen könne, und es daher überflüssig sei, die falschen Ansichten zu bekämpfen.

In Aufzeichnungen aus dem Jahre 1852 sagt Johann, die Anfänge der Allheillehre lägen etwa 30 Jahre zurück. Man käme damit auf die Zeit, in der Johann die absolute Geometrie entdeckte und, wie er in der Bittschrift an den Erzherzog Johann vom Jahre 1832 sagt, „zur Ausbildung des ganzen [Menschen]-Geschlechts beizutragen Kraft in sich fühlte". Der Ursprung der Allheillehre geht jedoch aller Wahrscheinlichkeit nach noch weiter zurück, nämlich bis in die Jugend Johanns, als sein Vater ihm „Andeutungen zuwarf", Andeutungen, die in ihm Wurzel faßten und sich allmählich ausgestalteten. Wolfgang hat seine metaphysischen Gedanken, die sicherlich auf seine eigene Jugendzeit zurückgehen, im *Tentamen* niedergelegt. Wahrheit und Liebe, sagt er, sind die zwei unverwischbaren Züge im Bilde Gottes, und das Ziel des menschlichen Strebens muß es sein, daß wir erstens das staunenswerte All so viel als möglich immer tiefer zu durchschauen suchen und zweitens dazu beitragen, daß sich alles in gegenseitiger Liebe vereinige und der jetzt noch bestehende Mißklang in die Harmonie der größten intensiven und extensiven Seligkeit aller und jedes einzelnen verwandelt werde. Ein Zusammenhang zwischen diesen beiden scheinbar ganz verschiedenartigen Zielen wird dadurch hergestellt, daß „die aus den reinen Quellen der Mathematik geschöpfte Wahrheit den angeborenen Sinn von Gott, Sittengesetz und Unsterblichkeit erweckt. Mit Hilfe dieser Wissenschaft gelangen wir tiefer in die Erkenntnis der inneren und äußeren Natur,

sodaß die in der Welt lebende Wahrheit ans Tageslicht dringt und die Tugend zum Vorschein kommt."

Johann teilte mit seinem Vater den Enthusiasmus für die Mathematik. Mit begeisterten Worten hat er in dem Vorwort zur *Reformation der Elemente der Mathematik* (1832) den Genuß gepriesen, den diese Wissenschaft vor allen andern zu gewähren vermöge:

„Bei übrigens gleichen Umständen ist der Mathematiker unstreitig des höchsten, reinsten Glücksgefühls sich bewußt. Er nur ist in strengem Verstande *wach*; nur er ist nüchtern vom Sinnenrausch. In ihm nur (und nicht im sinnenberauschten Dichter, der zwar in seiner Begeisterung oft sehr schön klingende und sehr gemütlich ins Leben greifende Dinge sagt) lodert des ewige Himmelsfeuer in klarem, hellen Glanze. Er nur kennt den höchsten Sinn, mit kalter, ruhiger und eben deshalb *höchster* Begeisterung das staunenswerte All betrachtend und auf den letzten Grund nach Kräften dringend, den Zusammenhang von allem zu erklären strebend und mit dem höchsten Geiste immer vertrauter zu werden trachtend, dessen Wesen sich immer deutlicher gestaltend, an Liebe zu ihm stets zunehmend, die sich auf die würdigste, edelste Art dadurch kundgibt, wenn man durch den Gedanken an Ihn mit einer Art Schauer erregenden Begeisterung erfüllt wird. Wer eine höhere Aufgabe und Tendenz kennt, ich beneide ihn nicht darum, muß ihn aber wohl bedauern."

Vor der Mathematik muß auch die Wissenschaft zurücktreten, die den höchsten Rang zu beanspruchen pflegt, die Philosophie. „Die gewöhnliche scholastische Metaphysik ist zum größten Teile eine elende Ausgeburt überspannter und kranker, im Gebiete der menschlichen Erkenntnis nicht gehörig orientierter Kräfte, denn was von ihrer Wissenschaft Solidität besitzt, gehört zur Mathematik, der einzigen, wahren *Grundwissenschaft*, und das übrige sind nur Spitzfindigkeiten, wodurch man das unendliche, hochherrliche Gebiet der nützlichsten und lohnreichsten Lehren ganz verläßt."

Aber die Mathematik hat eine noch höhere Bedeutung, sie ist die Grundlage nicht nur der geistigen, sondern auch der sittlichen Bildung. Wenngleich dieser Gedanke schon bei Wolfgang auftritt, so hat ihn doch erst Johann folgerichtig durchgeführt und zu Ende gedacht, offenbar veranlaßt durch Erfahrungen, die er an sich selbst gemacht hatte. Die Mathematik hatte ihn in seiner Einsamkeit getröstet, ihm über Stunden der Trübsal und Verzweiflung hinweggeholfen, ihm einen Halt gegeben, wenn die Wogen der Leidenschaften über ihn hereinbrachen. Was ihm genützt, ihm Hilfe und Rettung verschafft hatte, das mußte für alle Menschen heilsam sein, so schloß Johann, wie jeder Weltverbesserer.

Von hier aus versteht man seine Aussprüche: „Man kann zur Glückseligkeit der Menschen nur so viel beitragen, daß man den Verstand durch gründliche Kenntnisse aufzuklären trachtet“ und umgekehrt: „Alles Übel in der Welt ist nur dazu da, um zur Beseitigung anzuspornen, somit den Verstand zu schärfen.“ Immer wieder aber wird der Spruch angeführt, der das Titelblatt seiner Allheillehre zieren sollte: „Der Kopf muß das Herz bilden.“

In der Spätzeit Johanns tritt noch ein Gedankenzug hinzu. Je weniger Anerkennung Johann für seine wissenschaftlichen Leistungen findet, je mehr ihn die Menschen verachten und kränken, um so mehr wächst in ihm die Überzeugung von seinem inneren Werte, von seiner besonderen Stellung. Ihm war es gelungen, wie er in der Eingabe an den Erzherzog Johann sagt, die „wesentlichste, wichtigste, interessanteste und auch genug verwickelte Aufgabe der Raumlehre zu lösen und eine aus dem Grunde und durchaus neue, bisher von den Geometern nicht einmal dem Begriffe nach geahnte Wissenschaft aufzubauen“. Mit gleichem Erfolge hatte er „noch sehr viel andere, wichtige Gegenstände bearbeitet und sozusagen eine gänzliche Reform der bisher (in Übereinstimmung mit dem Ausspruche der ersten Geister) sehr elend behandelten Mathematik vorgenommen“. Jetzt fühlte er in sich die Kraft, die Reformation der Menschheit durch seine Allheillehre zu bewirken, deren Annahme, wie er meinte, im Laufe weniger Jahre alle Leiden beseitigen und die allgemeine Glückseligkeit herbeiführen würde.

Die Allheillehre sollte aus drei selbständigen, aber eng zusammenhängenden Teilen bestehen, der Leitlehre, der zeitlichen Allheillehre, der vollkommenen Allheillehre. Die Leitlehre war als eine Einleituug gedacht, in der die Grundgedanken dargestellt wurden. Diese ausführlich zu entwickeln war die Aufgabe der zeitlichen Allheillehre. Zeitlich, das heißt vorläufig, dem augenblicklichen Stande des Wissens entsprechend, war diese erste Ausarbeitung, und es sollte ihr daher eine vollkommene Allheillehre folgen, in vollkommener Sprache geschrieben, in der mit vollkommener Klarheit die gesamten Ergebnisse wahrer Wissenschaft als ein lebendiges Ganze zusammengefaßt werden, „wo es erwünscht geachtet wird, mit Angabe der Namen der betreffenden, nach Gebühr verehrten Erfinder“.

Wer zum Heil gelangen will, hat sich zunächst mit dem Inhalt der Allheillehre vertraut zu machen. „Einen bedeutenden und wesentlichen Teil des Heiles bildet das *Lernen* der Heillehre, den anderen, nicht minder edlen und vorzüglichen das der Heillehre gemäße *Leben*. Von der Gesamtheit der Wissenschaften macht die Mathematik den Hauptteil aus, sie bildet die einzig feste Grundlage aller übrigen Teile

und somit des allgemeinen Heiles.“ Die Allheillehre sollte daher mit einer ausführlichen Darstellung der Mathematik beginnen, der die bereits mitgeteilte Anordnung: Lehrenlehre, Gruppenlehre, Zahlenlehre, Zeitlehre, Bewegungslehre zugrunde lag; dann sollten die anderen Lehren folgen, ebenso wie die Mathematik aus wenigen, einfachen Grundsätzen hergeleitet.

Von den „Lehren nebst Nebenlehren“ sind zahlreiche Entwürfe vorhanden. Daß Johann sich der Unvollkommenheit seiner Versuche bewußt war, zeigt der Titel: „zeitliche“ Allheillehre. Wichtiger sind die Bruchstücke der Leitlehre, weil sie erkennen lassen, worin das Wesen der neuen Religion bestehen sollte.

„Diese Lehre gewährt folgende äußerst wichtige Vorzüge:

1. Gebührend klar auseinandergesetzter Beweis des Satzes, daß schlechterdings kein Privatheil ohne das allgemeine Heil herbeigeführt werden oder bestehen könne oder niemand vollkommen glücklich werden könne, bis er nicht zugleich das Heil aller anderen, mit ihm in möglicher Gemeinschaft stehenden fest begründet weiß oder [zu] einer derlei Allheils möglichsten Förderung oder, nach geschehener Erreichung, dessen Erhaltung nicht zugleich tätig [sein] will.

2. Zurückführung des Hauptzwecks auf eine zweckmäßige Lehre, [so] daß die Befolgung dieser durch den unwiderstehlichen Zauber oder [die] moralische Macht schon von selbst eine natürliche, ja notwendige Folge deren Gehaltes sei, und somit Zurückführung der Schwierigkeit eines zur Glückseligkeit von allen Weltweisen für notwendig erachteten tugendhaften Lebenswandels auf die Verfassung einer vollkommenen und vollständigen Allheillehre, wovon die gehörige Verbreitung alsdann ebenfalls eine notwendige Folge ist, und zugleich die wichtigste, bisher vermißte Ergänzung der die kolossalen Bücher- und Handschriftensammlungen der Erde füllenden, bisher größten Teils unfruchtbaren Lehren, wonach hier nicht nur das gebührend klar gelehrt wird, was wirklich wahr wäre, sondern auch angegeben wird, wie man die nötige Wahrheit stets finden, das Gute befolgen und das echt Schöne empfinden werde. Ohnedies kann so wie jede andere Aufgabe auch die gegenwärtige schönste, notwendigste, heilvollste aller Aufgaben nur durch eine Lehre gelöst werden, welche Auflösung in diesem Werke in der Tat auch ausgeführt wird.

3. Die Verfassung und somit auch gehörige Verbreitung nach der daselbst erteilten Vorschrift einer teils vollkommenen, teils zeitlichen Allheillehre und der nötigen Allheilleitlehre hierzu ist demnach die erste, höchste, oberste, schönste, wichtigste, genußreichste, heilvollste aller denkbaren Beschäftigungen im Weltall.“

Die Verbreitung und damit die Annahme der Allheillehre würde die Menschheit in einen „sittlichen Mechanismus“ verwandeln und damit die allgemeine Glückseligkeit herbeiführen. Alles, was von der Allheillehre ablenken könnte, ist daher zu verbannen oder doch in die gebührenden Grenzen zurückzudrängen, im besonderen die Künste, weil sie den Verstand nicht ausbilden und falsche Vorstellungen von der Wirklichkeit erwecken; nur die Musik darf geduldet werden. „Eine schöne Musik soll und darf man anhören, eine schöne Gegend betrachten, selbst angenehme Empfindungen sind gestattet, zum Beispiel [die Freude] an einem angenehmen Geruch, an wohlschmeckenden Speisen, am Antasten, Berühren, Streicheln von leblosen Dingen, z. B. von Samt. Ebenso Spazierengehen, Reiten, Fahren, Schaukeln. Aber diese Vergnügungen sind stumpferer Art als die wissenschaftlichen. Ganz besonders sind belebte Schönheiten möglichst zu meiden und nur zur Würze anzublicken oder gar zu berühren. Hier ist es am schwersten, eine scharfe Grenze anzugeben. Denn unterläßt man allen Umgang mit dem anderen Geschlecht, so hört unser Geschlecht auf; zu viel Umgang ist eine Hölle und macht zum Krüppel; auch ist es oft leichter, das andere Geschlecht ganz zu meiden, als im Umgang damit Maß und Ziel zu halten.“

Johann vermeidet es, genauer auf die Folgen einzugehen, die sich aus der Annahme der Allheillehre für die religiösen, politischen und sozialen Verhältnisse ergeben würden. Auf einem der zahlreichen Entwürfe zum Titelblatt der Allheillehre erklärt er sogar, diese Schrift solle dienen „zur möglichsten und in geringen Kräften stehenden Beförderung des allerhöchsten Dienstes“. Das schließt nicht aus, daß sich Johann gelegentlich ausmalt, wie es auf Erden aussehen würde, wenn seine Lehre allgemein Eingang gefunden hätte; es ist begreiflich, daß er dabei kommunistischen Anschauungen nahe kommt, die ja auch dem ersten Christentum nicht fern lagen.

Außer durch die Allheillehre denkt Johann sich die Menschheit der Zukunft verbunden durch eine allgemeinverstandene, vollkommene Sprache, in der die vollkommene Allheillehre verfaßt werden sollte. Auch hier hat Wolfgang Bolyai die erste Anregung gegeben, und zwar in seinem Buche *Az arithmetica eleje* vom Jahre 1830, das bereits im XV. Kapitel wegen der darin enthaltenen Vorschläge zur Schaffung einer verbesserten, der magyarischen Sprache angepaßten Schrift erwähnt wurde. Die wichtigsten Stellen hat Wolfgang als Anhang zum ersten Bande des *Tentamen* wieder abgedruckt. „Bei dem riesigen Anwachsen der Wissenschaften“, sagt er, „mit dem die menschliche Zeit und Kraft nicht Schritt hält, wäre es wünschenswert, wenn die gelehrten Gesellschaften sich darüber einigen könnten, daß sie statt in den

vielen und immer mehr und mehr werdenden Sprachen alles in einer mit mathematischer und musikalischer Seele geschaffenen Sprache drucken (und das Nötige übersetzen) ließen; einen großen Teil unseres kurzen Lebens, das wir mit beständigem Suchen nach dem Schlüssel verbringen, — kaum treten wir in den Tempel der Wissenschaft ein, so geht die Sonne schon unter — könnten wir in diesem zubringen. ... Neben der gemeinsamen Sprache müßte jede Nation dann auch ihre eigene pflegen, und zwei Sprachen könnten beide Geschlechter erlernen, und wenn jede Nation eine Sprache sprechen könnte, welch' zusammenfassendes (in unserm Vaterlande so sehr erwünschtes) Band wäre es, daß sie einander verstehen, und welche Annäherung an die Einheit des Menschengeschlechts."

Welchen Eindruck diese Äußerungen Wolfgangs auf Johann machten, zeigt eine Aufzeichnung, die aus der Zeit nach 1848 stammt: „Da ich auch in der deutschen Sprache, mich auf Schritt und Tritt an dem Gefühl der Inkonsequenz und Unvollkommenheit entrüstend, anstieß, fand ich endlich den 1830 erschienenen *Az arithmetica eleje* meines Vaters und in diesem die Verbesserung unserer Buchstaben und Kunstausdrücke sowie den Versuch, in Übereinstimmung mit der Natur unserer Sprache Neues und Erneuerndes zu schaffen; dies reißt hin, setzt in Flammen. Aber erst seit dem Sommer des Jahres 1842 [habe ich mich damit genauer beschäftigt] und noch ein anderer Umstand leitete [mich] dazu hin, daß ich nämlich wünschte, meinem Vater einen Gegenstand der Zeitlehre, vorzüglich meine Lehre von den algebraischen Gleichungen vorzulegen."

An einer anderen Stelle sagt er: „Hindernis der Sprache, daß man ein und denselben Begriff und um so mehr Urteil auf mehrere, ja vielerlei Art ausdrücken kann". Dieser Ausspruch gibt den Schlüssel zu einer früher erwähnten Eigenheit Johanns, die zunächst ganz unverständlich, ja krankhaft erscheint, daß er nämlich in vielen, wenn auch keineswegs in allen Aufzeichnungen der Spätzeit den meisten Worten noch ein, zwei, drei, bis zu einem Dutzend sinnverwandter Worte hinzufügt. Er wollte damit zum Ausdruck bringen, wie unvollkommen die jetzige Sprache sei, bei der eben ein und derselbe Begriff, ein und dasselbe Urteil sich auf mehrere Arten ausdrücken lasse. Die vollkommene Sprache sollte eine eindeutige Abbildung des Denkens sein.

Die einzigen Gebiete, in denen sich diese Forderung annähernd erfüllen läßt, scheinen die formalen Wissenschaften, Logik und Mathematik zu sein, wenigstens liegen hier einige nicht ganz erfolglose Ansätze vor. Dagegen bedeutet Johanns Forderung allgemein aufgefaßt eine Unmöglichkeit, weil zwischen dem Wort, dem Urteil, das ich höre, und den dadurch ausgelösten psychischen Vorgängen keine eindeutige,

d. h. bei allen Menschen identische und bei jedem einzelnen Menschen unveränderliche Beziehung besteht. Dagegen verdient der Vorschlag einer künstlichen Sprache, die in einem gewissen Grade als allgemeines Verständigungsmittel dienen soll, beachtet zu werden, wenn auch die Schwierigkeiten seiner Durchführung größer sind, als die Vertreter dieses Gedankens glauben. Zu den zahlreichen Versuchen, eine solche internationale Sprache zu schaffen, tritt Johann Bolyais Weltsprache hinzu. Als Grundlage diente ihm seine Muttersprache, die er vereinfachen und im besonderen von allen Ausnahmen befreien wollte. Dieser Arbeit hat er sich mit bewunderungswürdigem Fleiße unterzogen; gleichzeitig hat er dabei die von Wolfgang vorgeschlagene verbesserte Schrift zur Anwendung gebracht. In seinem Nachlaß finden sich umfangreiche Wörterbücher der neuen Sprache, die wohl genauerer Durchsicht wert wären. Johann hat auch begonnen, seine Lehre vom Allheil in ihr darzustellen; die betreffenden Aufzeichnungen tragen den Titel *Tan-Tan*, d. h. *Lehre der Lehren.*

Wie Bedőházi erzählt, hat Johann die Allheillehre ängstlich, wie ein Geheimnis gehütet und nur als seinen letzten Willen den Wunsch ausgesprochen, daß ein würdiger Mann seine Aufzeichnungen übernehmen, die Lehre vollenden und sie veröffentlichen solle. Dieser Mann hat sich nicht gefunden. Aber was unvergänglich an der Allheillehre ist, das lebt fort: die Begeisterung für die erhabene Wissenschaft der Mathematik.

XX. Kapitel

Schlußwort

Die erste Schrift, durch die der Name Bolyai außerhalb seines Vaterlandes bekannt wurde, war das bereits im XVII. Kapitel erwähnte Buch *Gauss zum Gedächtnis*, das der Professor der Mineralogie und Geologie an der Universität Göttingen Wolfgang Freiherr Sartorius von Waltershausen ein Jahr nach dem Tode von Gauss, 1856, veröffentlicht hat. Der österreichische Astronom Kreil, der auf einer wissenschaftlichen Reise im August 1848 in Maros-Vásárhely gewesen war und dort Wolfgang Bolyai kennen gelernt hatte, hatte die Abschrift eines an ihn gerichteten Briefes von Wolfgang, der sich auf dessen Freundschaft mit Gauss bezog, am 24. April 1855 an Sartorius geschickt. Dieser setzte sich sogleich mit Wolfgang in Verbindung und bat ihn um die Briefe von Gauss. Am 13. Juli 1856 willfahrte Wolfgang dieser Bitte. Sartorius hat den Briefwechsel Gauss-Bolyai noch für seine Gedächtnisschrift benutzen können. Wolfgang erscheint darin allerdings wesentlich als Jugendfreund von Gauss, und seine eigenen wissenschaftlichen Leistungen werden ebenso wenig gewürdigt wie die seines Sohnes Johann. Dieser war daher mit den Äußerungen Waltershausens wenig zufrieden und hat in den S. 184 erwähnten biographischen Aufzeichnungen über Wolfgang seiner Mißstimmung unverhohlenen Ausdruck gegeben. „Höchst wahrscheinlich durch die Wahrnehmung der Arbeit von Wolfgang Bolyai", meint Johann, „wurde auch Gauss aufmerksam auf den Gegenstand [der Parallelentheorie] (was um so wahrscheinlicher ist, als es in der durch Herrn Sartorius 1856 gelieferten Lebensbeschreibung (S. 80) heißt: Gauss habe an der Raum-Lehre anfangs wenig Interesse genommen und erst *später* habe sich dies bei ihm in hohem Grade entwickelt; übrigens erkläre ich diesen anfänglichen Mangel an Interesse dadurch, daß Gauss, damals von der Schönheit der ungeheuer ausgebreiteten Zahl-Lehre entzückt, hauptsächlich sich damit beschäftigte und darin Erstaunliches leistete, denn jeder gerät in seiner Jugend auf irgendeinen Weg und nur die göttliche Kraft ist unermeßlich) und bemühte sich sonach, auch diesen Knoten zu lösen. Das Resultat seiner diesfälligen Nachforschungen war, daß er

an Wolfgang Bolyai schrieb: daß, wenn es nur erweislich wäre, daß es ein beliebig großes ebenes geradliniges Δ gebe, das übrige ihm schon gelänge. Ein andermal schreibt er: «Vielleicht wird es mir einstens gelingen, diese Klippen zu umfahren». Und wieder ein ander Mal (die chronologische Ordnung ist mir, da die Briefe von Gauss durch Wolfgang Bolyai soeben an die Universität Göttingen zurückgeschickt sind, unbekannt), daß der von ihm eingeschlagene Weg nicht sowohl zu einem Beweise des [XI. Axioms] als vielmehr zu einem Zweifel an dessen Wahrheit führe."

Bei der Erzählung von der Begegnung Gaussens mit seinem Vater auf dem Walle in Göttingen berichtet Johann: „Mein Vater sprach unter anderem von seinen Gedanken bezugs einer Erklärung der geraden Linie und der etwaigen Wege zum Beweise des XI. Axioms und der schon damals zum Koloß in den höheren Regionen der Wissenschaft, besonders der Zahlenlehre emporgewachsene Gauss brach ergötzt, überrascht in die lakonischen Worte darüber aus: «Sie sind ein Genie; Sie sind mein Freund». Übrigens ist es durchaus irrig, wenn es in dessen durch Herrn Prof. Sartorius zu Göttingen im Jahre 1856 gelieferten Lebensbeschreibung S. 17 steht, daß Gauss geäußert hat, Wolfgang Bolyai sei der einzige gewesen, der in seine metaphysischen Ansichten der Mathematik einzugehen wußte, indem 1. Gauss sein ganzes Leben hindurch mit seiner Arbeit, solange sie nicht im Drucke das Tageslicht erblickte, sehr zurückhaltend war und somit meinem Vater auch *gar nicht* derlei mitteilte, außer daß er auf die mitgeteilte Ansicht meines Vaters über die Gerade erwiderte: «Ja, wahrlich, die Gerade wird schändlich behandelt; sie ist in der Tat die Linie, welche *sich in sich selbst dreht*». Worauf ich jedoch bemerke, daß dieser Ausdruck fehlerhaft ist, indem die gerade Linie sich gar nicht um irgend zwei ihrer Punkte drehen kann. 2. Gerade mein Vater hatte ihm seine Ansicht über die Begründung der Mathematik eröffnet, und allem Ansehen nach ist Gauss dann und dadurch erst näher aufmerksam gemacht worden auf diesen hochwichtigen Gegenstand; was ja auch kein Wunder ist, indem Gauss sehr früh sich hauptsächlich mit der Zahl-Lehre befaßt hat, die denn auch bis ans Ende sein Lieblingsgegenstand blieb, indem er sie, obschon mit Unrecht, Königin der Mathematik nannte."

Die Antwort, die Gauss in betreff der Geraden gegeben hat, zeigt in Wahrheit, daß dieser schon vor dem Zusammentreffen mit Wolfgang Bolyai über die Grundlagen der Geometrie nachgedacht hatte; daß es sich so verhält, wird durch verschiedene Aufzeichnungen in seinem Nachlaß und durch eine Reihe von Äußerungen zu seinen Freunden bestätigt. Augenscheinlich sind die beiden Freunde unabhängig voneinander

auf die Frage nach den Grundlagen der Geometrie gekommen, die seit dem Erscheinen von Kants Kritik der reinen Vernunft (1781) die Gemüter bewegte; was sie in ihren Gesprächen, gegenseitig gebend und empfangend, verhandelt haben, wissen wir nicht genauer und brauchen es auch nicht zu wissen.

Wichtig ist es, daß Sartorius schon 1856 auf die Beschäftigung von Gauss mit der Parallelentheorie hingewiesen hat:

„Die Geometrie betrachtete Gauss nur als ein konsequentes Gebäude, nachdem die Parallelentheorie als Axiom an der Spitze gegeben sei; er sei indeß zur Überzeugung gelangt, daß dieser Satz nicht bewiesen werden könne, doch wisse man aus der Erfahrung, zum Beispiel aus den Winkeln des Dreiecks Brocken, Hohehagen, Inselsberg, daß er näherungsweise richtig sei. Wolle man dagegen das genannte Axiom nicht zugeben, so folge daraus eine andere, ganz selbständige Geometrie, die er gelegentlich einmal verfolgt und mit dem Namen Antieuklidische Geometrie bezeichnet habe."

Dieser Bericht von Sartorius wurde bald darauf bestätigt durch den 1860 erschienenen ersten Band des von Peters herausgegebenen Briefwechsels Gauss-Schumacher, wobei besonders die Briefe aus dem Jahre 1831 in Betracht kamen; diese liegen zeitlich vor dem Februar 1832, in dem Gauss den *Appendix* Johann Bolyais erhielt. In dem fünften, 1863 veröffentlichten Bande werden Lobatschefskijs *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* vom Jahre 1840 erwähnt, über die sich Gauss am 28. November 1846 mit hoher Anerkennung äußert. Auch Wolfgang Bolyai kommt in diesem Bande vor, jedoch lediglich als Göttinger Studienfreund von Gauss (Brief Schumachers vom 20. Februar 1849, Antwort Gaussens vom 12. März desselben Jahres).

Während Gauss aus Scheu vor dem „Geschrei der Böotier" seine Ansichten über das XI. Axiom für sich behalten hatte, machten diese kurzen Mitteilungen einen gewaltigen Eindruck und bewirkten, daß die Frage nach den Grundlagen der Geometrie bald die Teilnahme weiter Kreise erregte. Hier kann es nicht Aufgabe sein, die Geschichte dieser Bewegung zu schreiben, die auch heute noch nicht zum Abschluß gekommen ist, es muß vielmehr lediglich das herausgegriffen werden, was für die Würdigung von Wolfgang und Johann Bolyai in Betracht kommt.

Wenn man fragt, wie es gekommen ist, daß diese Namen unter den Mathematikern bekannt geworden sind, so hat Richard Baltzer (1818—1887) sich hierfür ein unvergängliches Verdienst erworben. Im zweiten Bande der ersten Auflage seiner *Elemente der Mathematik*

(Geometrie) vom Jahre 1862 sagt er noch nichts von Gauss, Johann Bolyai und Lobatschefskij. Dagegen werden in der zweiten Auflage vom Jahre 1867 diese Männer in einer Weise erwähnt, die zeigt, daß Baltzer inzwischen den Gedanken einer vom XI. Axiom unabhängigen Geometrie vollständig erfaßt hatte. Im vierten Buche, Planimetrie, § 2 Nr. 7 werden Parallele als solche Gerade erklärt, die nach demselben unendlich fernen Punkte gehen; dafür wird auf Lobatschefskij (1840) und J. Bolyai (1832) verwiesen. In Nr. 8, IV wird auseinandergesetzt, daß in der abstrakten Geometrie durch einen Punkt A zwei verschiedene Gerade AD und AF gehen, die mit den entgegengesetzten Schenkeln einer Geraden BC und BE parallel sind. Diese fundamentale Unterscheidung sei zuerst von Gauss (seit 1792) erkannt, aber nicht ausführlich mitgeteilt worden. Die wirklichen Gründer einer korrekten Parallelentheorie seien J. Bolyai und N. I. Lobatschefskij.

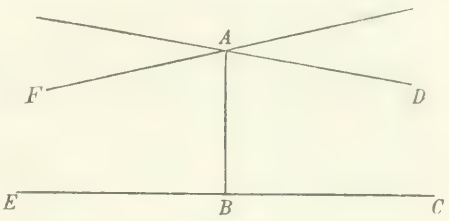


Fig. 19.

An die Seite von Baltzer trat bald ein zweiter Mathematiker, der nicht geringere Verdienste um das Bekanntwerden der beiden Bolyai hat, Jules Hoüel (1823—1886) in Bordeaux. Hoüel stand in Briefwechsel mit Baltzer, dessen *Elemente* er besprochen hatte. Diesem verdankte er die Kenntnis der Schriften von Lobatschefskij und J. Bolyai. Im Jahre 1867 hatte er bereits Lobatschefskijs *Geometrische Untersuchungen* in den Bordelaiser Denkschriften in französischer Übersetzung veröffentlicht, begleitet von einem Auszug aus dem Briefwechsel Gauss-Schumacher. Im Jahre 1868 ließ er eine Übersetzung des *Appendix* von Johann Bolyai folgen, der eine Notiz über das Leben und die Werke von W. und J. Bolyai voranging. Der Verfasser dieser Notiz war der Baumeister Franz Schmidt (1827—1901) in Budapest, den Hoüel um Auskunft ersucht hatte. Schmidt verdient es durchaus, neben Baltzer und Hoüel genannt zu werden. Er hatte sich im Jahre 1864 an Hoüel mit der Bitte gewandt, ihm Auskunft über gewisse in Frankreich erschienene mathematische Werke zu geben, die er für seine Bibliothek ankaufen wollte, und dieser hatte ihm bereitwillig geantwortet. Als Hoüel durch Baltzer auf die Schriften von Lobatschefskij und Bolyai aufmerksam gemacht wurde, wandte er sich am 17. Februar 1867 behufs Aufklärung an seinen ungarischen Bekannten und bat um genauere Nachrichten über die beiden Mathematiker, Wolfgang Bolyai, der ein Jugendfreund von Gauss gewesen

sei und 1829 ein zweibändiges Werk *Tentamen* usw. veröffentlicht habe, und J. Bolyai, der eine außerordentlich wertvolle, als Anhang zum *Tentamen* erschienene Schrift verfaßt habe; darin fänden sich nämlich die Gedanken, die gleichzeitig Lobatschefskij entdeckt und Gauss schon lange vorher besessen habe, ohne sie jedoch zu veröffentlichen. Der Verfasser des *Appendix* [soll heißen des *Tentamens*] habe später, 1851, ohne Nennung des Namens ein sehr merkwürdiges kleines Buch *Kurzer Grundriß eines Versuchs* ... herausgegeben, das er, Hoüel, besitze.

Es ist schon erzählt worden, daß merkwürdiger Weise der Name Bolyai dem Baumeister Schmidt nicht fremd war, weil sein Vater Johann kennen gelernt hatte, als dieser in Temesvár stand. Mit großem Eifer machte sich Schmidt ans Werk, sammelte die bereits vorhandenen zerstreuten und mangelhaften literarischen Notizen über die beiden Bolyai und wußte sich mehr Stoff aus Maros-Vásárhely zu verschaffen, wobei ihm besonders der dortige Professor am ev. ref. Kollegium Samuel Szabó behilflich war. So entstand eine ansprechend geschriebene, kurze Lebensbeschreibung der beiden Bolyai, die er Ende Dezember 1867 nach Bordeaux sandte. Hoüel, der die neue Einsicht in die Grundlagen der Geometrie mit Begeisterung aufgenommen hatte und für deren Verbreitung seine ganze Kraft einsetzte, sorgte nicht nur dafür, daß Schmidts Abhandlung in Grunerts Archiv aufgenommen wurde (48. Teil, 1868), sondern übersetzte sie auch ins Französische und ließ die Biographie zusammen mit einer musterhaften Übersetzung des *Appendix* im fünften Bande der Denkschriften der Akademie von Bordeaux abdrucken; das betreffende Heft ist gleichzeitig als selbständige Schrift bei Gauthier-Villars in Paris erschienen. Auf Hoüels Anregung ist auch die italienische Bearbeitung der Schmidtschen Lebensbeschreibung zurückzuführen, die Angelo Forti 1868 in dem Bulletino des Fürsten Boncompagni erscheinen ließ. In demselben Jahre veröffentlichte Battaglini in seinem *Giornale* eine italienische Übersetzung des *Appendix*.

Bei den erwähnten Nachforschungen hatte es sich herausgestellt, daß Johann Bolyais mathematischer Nachlaß noch vorhanden war und sich im Besitz des ev. ref. Kollegiums zu Maros-Vásárhely befand. Um die Benutzung zu ermöglichen, rief Hoüel die Vermittlung des Fürsten Boncompagni an, der den damaligen ungarischen Kultusminister Baron Josef Eötvös für die Sache zu gewinnen wußte. Dieser erreichte es, daß der Nachlaß Ende 1869 der Ungarischen Akademie zur Durchsicht übersandt wurde. Die Papiere wurden zuerst dem Professor Julius König, dann dem Baumeister Franz Schmidt übergeben, der sie im Juni 1894

der ungarischen Akademie zurückstellte. Der Nachlaß wurde nunmehr nach Maros-Vásárhely zurückgesandt, wo er sich noch gegenwärtig befindet. Bei der Durchsicht fand ein Sohn von Schmidt den bedeutsamen Brief Johanns an Wolfgang vom 3. November 1823; 1894 machte dieser selbst auf der Naturforscherversammlung zu Wien einige weitere Mitteilungen aus dem Nachlaß Johanns.

Die Abhandlung in Grunerts Archiv betrachtete Schmidt nur als den Vorläufer einer ausführlichen Lebensbeschreibung der beiden Bolyai, mit deren Vorbereitung er sich sein ganzes Leben hindurch beschäftigt hat; angestrengte Tätigkeit in seinem Beruf und mancherlei Krankheiten, die er durchzumachen hatte, haben sich jedoch der Ausführung des schwierigen Unternehmens entgegengestellt. Er mußte sich unter diesen Umständen darauf beschränken, 1898 in der Zeitschrift für Mathematik und Physik eine kürzere Biographie Johanns zu veröffentlichen. Was er über Wolfgangs Leben zu berichten hatte, ist in die Notizen über das Leben von Gauss und Wolfgang Bolyai aufgenommen worden, die dem 1899 von Schmidt und Stäckel herausgegebenen *Briefwechsel zwischen Gauss und Wolfgang Bolyai* beigegeben sind. Von diesen Briefen waren einige Bruchstücke gelegentlich der hundertjährigen Wiederkehr des Geburtstages von Gauss 1877 durch Schering abgedruckt worden. Versuche von Schmidt, Einsicht in diese für eine Biographie Wolfgang Bolyais unentbehrlichen Briefe zu erhalten, waren lange vergeblich geblieben, bis ihm endlich im Dezember 1896 die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen eine Abschrift der sämtlichen Briefe zur Verfügung stellte. Sie gab später auch die Erlaubnis, daß die Briefe auf Grund einer Vergleichung mit den Urschriften herausgegeben würden; durch die Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften wurde es möglich, daß im Sommer 1899 der *Briefwechsel Gauss-Bolyai* in der geschmackvollen Ausstattung der neuen, 1897—1904 veranstalteten Ausgabe des *Tentamens* erscheinen konnte.

Damit war ein lange gehegter Wunsch Schmidts erfüllt. Schon vorher hatte er aber einer Pflicht der Pietät gegen Johann Bolyai genügen können, die ihm am Herzen lag.

Der Apfelbaum, den Ludwig Dicsö gepflanzt hatte, war 23 Jahre lang das einzige Zeichen gewesen, wo sich Wolfgang Bolyais letzte Ruhestätte befinde. Im November 1879 beschloß der Vorstand des Kollegiums, einen Gedenkstein mit Inschrift aufzustellen; gleichzeitig wurde auch die ehemalige Wohnstätte Wolfgangs durch eine Tafel bezeichnet. Das Denkmal aus schwarzem Syenit trägt die Inschrift (in deutscher Übersetzung):

Wolfgang Bolyai

Professor der Mathematik und Physik am ev. ref. Kollegium zu Maros-Vásárhely 1804—1856

** 1775 † 1856.*

Aus öffentlichen Spenden der Vorstand des Kollegiums 1884

Aus dem übrig gebliebenen Gelde und sonstigen Geschenken kamen 100 Gulden zusammen, die als *Bolyai-Gauss-Gedächtnisstiftung* mit der Bestimmung verwaltet werden, daß die Zinsen jährlich einem guten Mathematiker der oberen Klassen des Kollegiums als Belohnung zu geben sind.

Johann Bolyais Grab lag noch immer verlassen und vergessen. Im Jahre 1893 reiste Schmidt nach Maros-Vásárhely und ließ sich von der damals noch lebenden Pflegerin Johanns, Juliana Szőts, die unkenntlich gewordene Grabstelle zeigen. Nach Budapest zurückgekehrt bewirkte er, daß die dortige Mathematisch-physikalische Gesellschaft durch eine Sammlung Mittel aufbrachte, die es ermöglichten, als Gedenkstein eine Pyramide aus Trachyt mit der einfachen Inschrift zu errichten:

Bolyai János
1802—1860

Am Fuße ist in kleinerer Schrift bemerkt (in deutscher Übersetzung): *Die Mathematisch-physikalische Gesellschaft als Zeichen der Pietät 1894.* Am 7. Juni 1911 sind die irdischen Überreste der beiden Bolyai exhumiert und in einem gemeinsamen Grabe beigesetzt worden.

Inzwischen hatten Johann Bolyais Gedanken weitere Verbreitung gewonnen. Auf die französische und die italienische Übersetzung des *Appendix* vom Jahre 1868 war 1872 eine deutsche Bearbeitung gefolgt, die *Absolute Geometrie* nach Johann Bolyai von J. Frischauf in Graz; später, 1876, hat Frischauf in den *Elementen der absoluten Geometrie* eine Darstellung gegeben, bei der auch die Untersuchungen von Lobatschefskij, Helmholtz und Riemann berücksichtigt werden. Die von Johann selbst herrührende deutsche Fassung der ersten 33 Paragraphen aus dem Jahre 1832 wird an dieser Stelle (zweiter Teil, S. 185—203) zum ersten Male abgedruckt; es folgen (S. 203—216) die Paragraphen 32—42 in deutscher Übersetzung. Eine engliche Übersetzung des *Appendix* hat Halsted, damals in Austin (Texas), im Jahre 1891 herausgegeben; 1896 ist davon die vierte Auflage erschienen. Ein Abdruck dieser englischen Übersetzung ist 1895 in Tokio herausgekommen. In Ungarn hatten Réthy seit 1874 und sein Nachfolger

Vályi seit 1887 durch Vorlesungen an der Universität Klausenburg für die Verbreitung der absoluten Geometrie und der Lehren des *Appendix* gewirkt; aber erst 1897 ist der *Appendix* von Suták und von Ignaz Rados ins Magyarische übersetzt worden. Es möge endlich noch erwähnt werden, daß der Archivar des gräflichen Geschlechtes Teleki de Szék, Stephan Biás von Ders, im Jahre 1907 zu Maros-Vásárhely einen anastatischen Neudruck der selten gewordenen Urausgabe des *Appendix* veranstaltet hat.

Nachdem Koloman von Szily 1884 in den Schriften der Ungarischen Akademie eine Biographie Wolfgang Bolyais veröffentlicht und Samuel Brassai 1886 die Autobiographie mitgeteilt hatte, die Wolfgang am 5. Oktober 1840 der Akademie einsandte, hat Wolfgangs letzter Schüler Josef Koncz 1887 in der von ihm herausgegebenen *Geschichte des ev. ref. Kollegiums zu Maros-Vásárhely* unter Benutzung der genannten Veröffentlichungen und auf Grund seiner eigenen, genauen Kenntnis der Verhältnisse ausführlich über Wolfgang und Johann Bolyais Leben berichtet.

Ein Zeichen der wachsenden Anerkennung, der sich Wolfgang und Johann Bolyai in ihrem Vaterlande erfreuten, war es, daß die Ungarische Akademie im Jahre 1887 beschloß, eine neue, würdige Ausgabe des schwer zugänglichen *Tentamens* zu veranstalten; wie bereits im V. Kapitel berichtet wurde, ist der erste, von Julius König und Moritz Réthy herausgegebene Band 1897, der zweite, von Josef Kürschák, Moritz Réthy und Béla v. Tőtössy besorgte Band 1904 erschienen; im Unterschied zur ersten Ausgabe wurde im ersten Bande alles auf die Arithmetik Bezügliche vereinigt, während der zweite alles auf die Geometrie Bezügliche, im Besonderen also auch Johanns *Appendix*, enthält.

Endlich ist 1897 von Johann Bedőházi, Professor am Kollegium zu Maros-Vásárhely, ein, mit großer Liebe geschriebenes größeres Buch über die beiden Bolyai herausgegeben worden. Um in möglichst weiten Kreisen seines Vaterlandes Anteil an den beiden Männern zu erwecken, die in der Geschichte der Mathematik in Ungarn eine so große Rolle spielen, hat Bedőházi sein Buch in allgemein verständlicher Sprache geschrieben und ist Erörterungen, die ein größeres Maß mathematischer Kenntnisse erfordern, aus dem Wege gegangen. Wolfgang tritt bei seiner Darstellung in den Vordergrund; bei Johann hat er sich nicht ganz von den Vorurteilen frei machen können, die in Maros-Vásárhely noch immer bestanden.

Der 15. Dezember 1902, der Tag, an dem Johann Bolyais Geburtstag zum hundertsten Male wiederkehrte, ist in seinem Vaterlande festlich begangen worden. In Johanns Geburtsstadt, Klausenburg, veranstaltete die dortige Franz Josephs-Universität am 15. Januar 1903 eine

Feier, bei der Ludwig Schlesinger die Festrede hielt und Koloman von Szily als Generalsekretär der Ungarischen Akademie deren schon am 27. Jan. 1902 gefaßten Beschluß öffentlich bekannt gab, bei dieser Gelegenheit, um das Andenken an Johann Bolyai und dessen Vater und Lehrer Wolfgang Bolyai dauernd zu erhalten, einen Preis von 10000 Kronen zu stiften. Der Preis soll vom Jahre 1905 ab alle fünf Jahre in der Dezembersitzung dem Verfasser des besten mathematischen Werkes zuerteilt werden, das während der fünf vorhergehenden Jahre erschienen ist; im Jahre 1905 hat ihn Henri Poincaré, im Jahre 1910 David Hilbert erhalten. Gleichzeitig wurde von der Universität Klausenburg eine Festschrift herausgegeben, zu der Bonola, Schlesinger und Stäckel Beiträge geliefert hatten, und an dem von Schlesinger ermittelten Geburtshause Johanns in der Tivoligasse, jetzt Bolyaigasse, eine Gedächtnistafel angebracht.

Am 15. Dezember 1902 war bereits eine Festsitzung der Ungarischen Akademie zu Budapest abgehalten und dabei eine Abhandlung von Stäckel über Johann Bolyais Raumlehre vorgelegt worden, die den Abschluß einer Reihe von Veröffentlichungen Stäckels über Ungarns größten Mathematiker bildet.

Aber auch in Maros-Vásárhely hat das ev. ref. Kollegium seines großen Zöglings gedacht, indem es wenige Tage nach der Klausenburger Bolyai-Feier, am 25. Januar 1903, seinem Andenken eine Schulfeier widmete, bei der die Professoren S. Lakatos und J. Bedőházi Ansprachen hielten.

So ist der Wunsch, den der unermüdliche Vorkämpfer für die Sache der Bolyai, Franz Schmidt, im Jahre 1868 ausgesprochen hatte, daß der Name Bolyai überall, wo man die mathematischen Wissenschaften pflege, in Ehren genannt werde, in reiche Erfüllung gegangen.

Anmerkungen und Nachweisungen

Als Quellen für die Darstellung des Lebens von Wolfgang und Johann Bolyai haben gedient:

1. Die von ihnen selbst veröffentlichten Schriften.

2. Die von ihnen hinterlassenen Papiere und die auf sie bezüglichen Aufzeichnungen und Briefe, die sich im Besitz der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, des ev. ref. Kollegiums zu Maros-Vásárhely und des Herrn Prof. P. Szabó zu Budapest befinden.

3. Eine Reihe von Abhandlungen und Werken, die teils die beiden Bolyai unmittelbar, teils die Geschichte der Parallelentheorie und der nichteuklidischen Geometrie zum Gegenstand haben.

Im Folgenden sind für diejenigen Stellen des Textes, bei denen ein Zurückgehen auf die Quellen für den Geschichtsforscher von Wichtigkeit sein kann, die erforderlichen Nachweisungen gegeben worden. Ferner findet man hier eine Reihe von Aufzeichnungen abgedruckt, die als Beleg für die betreffenden Stellen der Lebensbeschreibung dienen sollen. Endlich bringt eine Reihe von Anmerkungen teils Erläuterungen, teils Ergänzungen zu den Angaben des Textes.

Verzeichnis der von Wolfgang Bolyai veröffentlichten Schriften

I. Mathematische Schriften

1. *Az arithmetica eleje* (Elemente der Arithmetik). Maros-Vásárhely 1830, XX u. 162 Seiten. Die Druckerlaubnis ist vom 12. Oktober 1829.

2. *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi, cum Appendice triplici.* Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque Publ. Ordinario.

Tomus primus. Maros-Vásárhelyini 1832, LII u. 502 Seiten, dahinter der von Johann Bolyai verfaßte *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, 30 Seiten. Den Schluß bilden Bemerkungen in magyarischer Sprache, 16 Seiten. Nach und nach sind bis zum Jahre 1844 noch 50 Seiten Verbesserungen und Anmerkungen hinzu gekommen. Die Druckerlaubnis ist vom 12. Oktober 1829.

Tomus secundus. Maros-Vásárhelyini 1833, XVI u. 400 Seiten. Dieser Teil enthält den dreifachen Anhang: I. De perspectiva, II. De gnomonica, III. De chronologia. Die Druckerlaubnis ist vom 12. Oktober 1829.

3. *Az arithmeticának, geometriának és physicának eleje a M. Vásárhelyi kollégyombeli alsóbb tanulók számára a helybeli professor által. Első kötet.* Maros-Vásárhelyt 1834 (Elemente der Arithmetik, Geometrie und Physik für die Schüler der unteren Klassen des Kollegiums zu Maros-Vásárhely, 1. Band. X u. 90 Seiten.

4. *A Maros-Vásárhelyt 1829be nyomtatott Arithmetika elejének részint röviditett, részint bővitett, általán jobbitott s tisztáltabb kiadása. A szerző által.* Maros-Vásárhelyt 1843. (Der 1829 zu Maros-Vásárhely gedruckten Elemente der Arithmetik teils verkürzte, teils erweiterte, allgemeinhin verbesserte und gereinigte Ausgabe. Vom Verfasser besorgt.) XLIV u. 386 Seiten.

5. *Arithmetica eleje kezdőknek* (Elemente der Arithmetik für den Anfänger). 40 Seiten. Ohne Angabe von Ort, Jahr und Verfasser. Erschienen Maros-Vásárhely 1850.

6. *Űrtan elemei kezdőknek* (Elemente der Raumlehre für Anfänger). 48 Seiten. Ohne Angabe von Ort, Jahr und Verfasser. Erschienen Maros-Vásárhely 1850/51.

7. *Kurzer Grundriß eines Versuches* usw. Maros-Vásárhely 1851. 88 Seiten.

8. Wolfgangi Bolyai de Bolya *Tentamen*, editio secunda, Tomus I: Conspectus arithmeticae generalis, ediderunt Iulius König et Mauritius Réthy. Budapestini 1897, XII u. 679 Seiten. Tomus II: Elementa geometriae et appendices, ediderunt Iosephus Kürschák, Mauritius Réthy, Béla Totössy de Zepethnek. Budapestini 1904, LIV u. 439 Seiten; dazu ein Band mit 74 Figurentafeln zum *Tentamen* und 7 Figurentafeln zum *Appendix*.

II. Dichtungen und Übersetzungen

1. *Öt Szomorujáték.* Irta egy Hazafi (*Fünf Tragödien.* Geschrieben von einem Patrioten), Hermannstadt 1817.

2. *A párisi per.* Erzékeny jaték 5 felvonásban (Der Pariser Prozeß. Ein sentimentales Spiel in 5 Aufzügen.) Maros-Vásárhely 1818.

3. *Az ősz lantos hattyúdala három nyelven* (Der Schwanengesang des greisen Barden in drei Sprachen). Stimmen des Herzens zur Begrüßung Sr. Majestät Franz Joseph in Maros-Vásárhely am 31. Juli 1852. Maros-Vasárhely 1852.

4. Pope *próbatele az emberől.* Anglusbol fordítva. Más poetákból való toldalékkal. (Popes Essay on man. Aus dem Englischen übersetzt. Mit einem Anhang aus anderen Poeten.) Maros-Vásárhely 1818.

Verzeichnis von Schriften die sich auf Wolfgang und Johann Bolyai beziehen

Vorbemerkung. Das folgende Verzeichnis macht nicht darauf Anspruch „vollständig" zu sein; es sind im Gegenteil einige Veröffentlichungen absichtlich weggelassen worden, weil sie nichts bringen, was nicht schon in den angeführten Quellen enthalten wäre.

Am Schluß einiger Nummern ist in *Kursivschrift* die abkürzende Bezeichnung angegeben, mit der die betreffende Veröffentlichung in den Anmerkungen und Nachweisungen angeführt wird.

1. J. Bedőházi, *A két Bolyai* (Die beiden Bolyai). Maros-Vásárhely 1897, 454 Seiten (*Bedőházi*).

2. S. Brassai, *Emlekbeszéd Bolyai Farkas felett* (Gedächtnisrede auf Wolfgang Bolyai), Erdélyi Muzeum, 3. Bd., 1886.

3. F. Engel, *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij*, zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers. Leipzig 1898, XVI u. 476 S. (*Engel*).

4. J. Koncz, *A marosvásárhelyi ev. ref. kollegium története* (Geschichte des Maros-Vásárhelyer ev. ref. Kollegiums). Maros-Vásárhely 1886—1896 als Programm-Abhandlungen erschienen; die auf Wolfgang Bolyai bezüglichen Ausführungen (S. 271—338) sind 1887 herausgekommen. (*Koncz*).

5a. L. Schlesinger, *Szemelvények Bolyai Bolyai Farkasnak Lézefalvi Bodor Pálhoz 1815-től 1825-ig irt leveleiből* (Auszüge aus Briefen Wolfgang Bolyais an Paul Bodor von 1815—1825), Mathematikai és Physikai Lapok, Bd. 11 (1902), S. 197—230.

5b. L. Schlesinger, *Neue Beiträge zur Biographie von Wolfgang und Johann Bolyai*, Bibliotheca mathematica (3), Bd. 4 (1903), S. 260—270 (*Schlesinger, Neue Beiträge*).

6a. L. Schlesinger, *Emlékbeszéd* (Gedächtnisrede), Acta universitatis litterarum regiae hungaricae Francisco-Josephinae Kolozsváriensis Anni MCMII—III, Fasciculus II, S. 7—51; wiederabgedruckt Mathematikai és Physikai Lapok, Bd. 12 (1903), S. 57—88.

6b. L. Schlesinger, *Johann Bolyai*, Festrede gehalten bei der von der königl. ungarischen Franz-Josefs-Universität veranstalteten Bolyai-Feier am 15. Januar 1903, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 12 (1903), S. 165—194 (*Schlesinger, Festrede*).

7. Fr. Schmidt, *Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker, Johann und Wolfgang Bolyai von Bolya*, Archiv der Mathematik und Physik, Bd. 48, 1868, S. 217—228. Französische Übersetzung von J. Hoüel: *Notice sur la vie et les travaux des deux mathématiciens hongrois W. et J. Bolyai de Bolya*, Mémoires de Bordeaux, t. V, 1868, S. 191—205. Italienische Bearbeitung von A. Forti: *Intorno alla vita ed agli scritti di Wolfgango e Giovanni Bolyai di Bolya matematici ungheresi*, Bolletino di biografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, t. 1, 1868, S. 277—299.

8. Fr. Schmidt, *Lebensgeschichte des ungarischen Mathematikers Johann Bolyai*, k. k. Hauptmann im Geniecorps, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft 8 (1898), S. 133—146.

9a. Fr. Schmidt und P. Stäckel, *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai*, herausgegeben mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. Leipzig 1899, 208 S. (*Br. G.-B.*).

9b. Fr. Schmidt und P. Stäckel, *Bolyai Farkas és Gauss Frigyes Károly levelezése*, a Magyar tud. Akadémia megbizásából szerkesztették, jegyzetekkel és életrajzzal ellátták. Budapest 1899.

10. P. Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, herausgegeben in Gemeinschaft mit F. Engel. Leipzig 1895. (Stäckel *und* Engel, *Th. d. P.*)

11. P. Stäckel und F. Engel, *Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie*, Math. Annalen, Bd. 49 (1897), S. 149—206; französische Übersetzung von L. Laugel, Bulletin des sciences math. série 2, t. 21 (1897), S. 206—228, auch als selbständiges Heft: *Gauss, les deux Bolyai et la géométrie non-euclidienne* (Paris, Gauthier-Villars 1897) erschienen.

12a. P. Stäckel, *A képzetes számok elmélete Bolyai János hátrahagyott irataiban*. Mathematikai és természettudományi Értesitő, 1899, S. 259—292.

12b. P. Stäckel, *Johann Bolyais Theorie der imaginären Größen*, Math. und naturw. Berichte aus Ungarn, Bd. 16, Jahrg. 1898 (1899), S. 263—297.

13a. P. Stäckel, *A nem Euklidikus geometria története Bolyai János hátrahagyott irataiban*, Mathematikai és természettudományi Értesitö, 1900, S. 241—256.

13b. P. Stäckel, *Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai*, auf Grund nachgelassener Aufzeichnungen Johanns dargestellt, Math. und naturw. Berichte aus Ungarn, Bd. 17, Jahrg. 1899 (1901), S. 1—19.

14a. P. Stäckel und J. Kürschák, *Bolyai János észrevételei Lobatschefskij Miklósnak a parallelákra vonatkozó vizsgálataira*, Mathematikai és természettudományi Értesitö, 1902, S. 40—67.

14b. P. Stäckel und J. Kürschák, *Johann Bolyais Bemerkungen über Nicolaus Lobatschefskijs Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Math. und naturw. Berichte aus Ungarn, Bd. 18, Jahrg. 1900 (1903), S. 250—279.

15a. P. Stäckel, *Viszgálatok az absolut geometria köréből*, Bolyai János *hátrahagyott irataiban*, Mathematikai és természettudományi Értesitö, 1902, S. 160—186.

15b. P. Stäckel, *Untersuchungen aus der absoluten Geometrie*, aus *Johann Bolyais Nachlaß herausgegeben*, Math. und naturw. Berichte aus Ungarn, Bd. 18, Jahrg. 1900 (1903), S. 280—307.

16a. P. Stäckel, *Bolyai János térelmélete*, Mathematikai és természettudományi Ertesitö, 1903, S. 135—145.

16b. P. Stäckel, *Johann Bolyais Raumlehre*, Math. und naturw. Berichte aus Ungarn, Bd. 19, Jahrg. 1901 (1904), S. 1—12.

17a. P. Szabó, *Adalékok Gauss és Bolyai levelezéséhez és Bolyai Farkas életrajzához*, Mathematikai és természettudományi Értesitö, 1907, S. 326—338.

17b. P. Szabó, *Beiträge zum Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai und zur Biographie von W. Bolyai*, Math. und naturw. Berichte aus Ungarn, Bd. 25, Jahrg. 1907 (1909), S. 226—240.

18. P. Szabó, Bolyai János ifjusága (Johann Bolyais Jugend), Mathematikai és Physikai Lapok, Bd. 19 (1910), S. 135—164.

19. K. von Szily, *Adatok Bolyai Farkas életrajzához* (Daten zur Biographie Wolfgang Bolyais), Értekézesek a mathematikai tudományok körébol (Abhandlungen aus dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften), Bd. 11, Heft 9, Budapest 1884 (Szily).

Zum I. Kapitel

S. 2, Z. 11—23. Josef Pálmay in Maros-Vásárhely, ein vortrefflicher Kenner der Geschichte des siebenbürgischen Adels, hat mir eine Reihe von Abschriften aus Urkunden verschafft, die sich auf die Familie Bolyai beziehen. Er konnte dabei auch Auszüge benutzen, die Wolfgang und Anton Bolyai in den Archiven von Kolozs-Monostor und Karlsburg gemacht hatten. Die eigentlichen Familienpapiere sind nämlich während der Minderjährigkeit von Gabriel (Gábor) Bolyai (gestorben 1753) in den Besitz der Grafen Bethlen gelangt, die sie nicht wieder herausgaben. Nach einer Mitteilung des Grafen Alexius Bethlen an Wolfgangs zweiten Sohn Gregor (Gergely) wurden die Papiere in drei Teile geteilt; der Teil, den Alexius Bethlen selbst besaß, ist 1848 bei dem Aufstand der Walachen durch Feuer vernichtet worden, ein anderer Teil war an den in Bethlen selbst wohnenden Zweig der Familie Bethlen gekommen, einen dritten Teil hatte das Minoritenkloster in Klausenburg erhalten. Da die Besitzansprüche, die den Grund zur Zurückhaltung gegeben hatten, gegenwärtig nicht mehr in Frage kommen, so scheint es nicht aussichtslos, Einsicht in die Papiere zu erhalten. Vielleicht gibt dieser Hinweis Anlaß zu weiteren Nachforschungen über die Familiengeschichte derer v. Bolya.

S. 2, Z. 16—11 v. u. *Briefwechsel Gauss-Bolyai*, S. 57.

S. 3, Z. 14—5 v. u. Aus einem Briefe Wolfgangs an Sartorius von Waltershausen in Göttingen vom 13. Juli 1856, *Br. G.-B.*, S. 151. Einen ähnlichen Bericht gibt Johann Bolyai — sicherlich auf Grund von Erzählungen seines Vaters — in der Einleitung zum *Bewis des XI. Axioms* (1856): „Mit 6 Jahren gelehrig, lebhaft, nicht spielsüchtig; mit 9 Jahren machte, selbstgelernet, augenblicklich lateinische Verse über jedes gegebene Thema, und der Schullehrer der Poesie gab die Arbeiten seiner Schüler, die drei Klassen vor[aus] waren, ihm zur Korrektur. Auch lernte er zu eben der Zeit, wie es der Professor der hellenischen Sprache selbst mit Erstaunen erzählte, binnen einer sechswöchentlichen Vakanz Griechisch und 500 Verse aus dem Homer obendrein auswendig; auch wußte er viel Hebräisch. War ein so starker Kopfrechner, daß er die Quadrat- und Kubikwurzeln aus einer gegebenen 14-ziffrigen Zahl mit Leichtigkeit auszog und noch mehr Ziffern verlangte. Jedoch war seine ganze mathematische Kenntnis damals noch so höchst oberflächlich und bloß mechanisch, daß er nicht einmal das wußte, daß man doch von allem einen Grund anzugeben habe."

S. 4, Z. 15—9 v. u., S. 4, Z. 5 v. u. — S. 5, Z. 1. Aus dem Briefe Wolfgangs an Sartorius von Waltershausen vom 13. Juli 1856, *Br. G.-B.*, S. 151.

S. 4, Z. 13 v. u. Anspielung auf 2. *Mos.* Kap. 3, Vers 2: „Und der Engel des Herrn erschien ihm [Mose] in einer feurigen Flamme aus dem Busch, und er sahe, daß der Busch von Feuer brannte und ward doch nicht verzehrt."

S. 5, Z. 10—12. In der Bibliothek des ev.-ref. Kollegiums in Maros-Vásárhely findet sich auch ein Porträt, das Wolfgang von sich selbst nach dem Spiegel gezeichnet hat; es ist von Bedőházi (S. 32) wiedergegeben worden.

Über Wolfgang als Zeichner und Maler hat Karl Gulyás in der ungarischen Zeitschrift Urania, Budapest 1913, S. 202—206, berichtet und eine Nachbildung einer der Ölskizzen, die ein idealisiertes Familienbild darstellt, beigegeben.

S. 5, Z. 17—21. Vgl. I. Kont, *Geschichte der ungarischen Literatur*, Leipzig, 1906, S. 147; Friedrich Riedl, *Die ungarische Literatur*. Die Kultur der Gegenwart, Teil 1, Abteilung IX, Die osteuropäischen Literaturen und die slawischen Sprachen, Berlin und Leipzig 1908, S. 289.

S. 5, Z. 10—5 v. u. Aus Wolfgangs *Autobiographie* (1840), Koncz, S. 280. Wolfgang war am 9. März 1832 zum Mitglied der Ungarischen Gelehrten Gesellschaft gewählt worden; aus dieser ist später die Ungarische Akademie der Wissenschaften hervorgegangen. Auf Drängen des Präsidenten, Grafen Josef Teleki, hat er am 5. Oktober 1840, wie es in der Satzung der Gesellschaft gefordert wurde, einen Bericht über sein Leben eingesendet; dieser ist 1886 von Brassai veröffentlicht und 1887 von Koncz wieder abgedruckt worden. Sehr bezeichnend für Wolfgang ist der Anfang des Berichtes: „Nachdem ich das Absenden meiner Lebensbeschreibung trotz mehrfacher Aufforderungen der *Gesellschaft* verschoben habe, schreibe ich nun auf Euerer Exzellenz Befehl nieder, was mir gerade in den Sinn kommt. Die Kürze der Zeit möge die Mangelhaftigkeit entschuldigen; denn ich habe mich vor dem Eintreffen Ihres gestern erhaltenen Briefes für heute zu Herrn Grafen Adam Bethlen versprochen, die Pferde sind schon hereingekommen, ich muß mich also nach Beendigung des Briefes sofort auf den Weg machen."

S. 5, Z. 2 v. u. — S. 6, Z. 6. Die Aufzeichnungen Gregors über das Leben seines Vaters hat Szily 1884 herausgegeben; Szily, S. 4.

S. 5, Z. 1 v. u. Mit der *Artillerieschule* ist wohl das k. k. *Bombardier-Corps* gemeint, das 1786—1804 in den vorher von der k. k. Ingenieur-Akademie innegehabten Gebäude On der Laimgrube untergebracht war, vgl. Gatti, *Geschichte der k. und k. technischen Militär-Akademie*, Bd. II, Wien 1905, S. 33—100. Seit 1787 war dort Professor matheseos Georg Freiherr v. Vega (1754—1802), der als Leutnant im 2. Feld-Artillerie-Regiment sein bekanntes, vielfach aufgelegtes Lehrbuch *Vorlesungen über die Mathematik* herauszugeben begann; es erschienen Bd. 1, elementare Arithmetik, Wien 1782, Bd. 2, theoretische und praktische Geometrie, Trigonometrie, höhere Geometrie, Infinitesimalrechnung, Wien 1784, Bd. 3, Mechanik fester Körper, Wien 1788. Eine Ergänzung hierzu bildeten die ebenfalls vielfach aufgelegten *Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln*, erste Auflage, Wien 1783.

S. 6, Z. 6—10. Aus Wolfgangs *Autobiographie* (1840), Koncz, S. 275.

Zum II. Kapitel

S. 7, Z. 5—7, 12—21. Aus Wolfgangs *Autobiographie* (1840), Koncz, S. 275. Fichte hat vom Mai 1794 bis Frühjahr 1799 in Jena gelehrt.

S. 7, Z. 23—28. Aus Johanns Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856).

S. 8, Z. 6—7. Aus Wolfgangs *Autobiographie* (1840), Koncz, S. 276.

S. 8, Z. 8—18. Über Seyffer vgl. Stäckel und Engel, *Th. d. P.*, S. 213—215.

S. 8, Z. 8 v. u. — S. 9, Z. 3. Aus Johanns Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856); vgl. auch S. 197 des Textes.

S. 9, Z. 4—13. Aus Wolfgangs *Autobiographie* (1840), Koncz, S. 276.

S. 9, Z. 13—21. Aus dem Briefe Wolfgangs an Sartorius von Waltershausen vom 13. Juli 1856, *Br G.-B.*, S. 152.

S. 9, Z. 17—12 v. u. Eschenburg wurde später Sekretär des Herzogs von Braunschweig; er ist als Regierungsrat in Detmold gestorben. Ide, wie Gauss ein Braunschweiger von Geburt, den dieser schon auf dem Collegium Carolinum kennen gelernt hatte, wurde 1803 als Professor der Mathematik nach Moskau berufen; leider ist er sehr bald dem russischen Klima erlegen. Eichhorn ist in den preußischen Staatsdienst getreten und von 1840—1848 Unterrichtsminister gewesen. Brandes wurde zunächst Deichinspektor im Großherzogtum Oldenburg und hat später als Professor der Mathematik an den Universitäten Breslau und Leipzig gelehrt; er war ein fruchtbarer Schriftsteller, und sein Name wird später von Gauss mit Achtung genannt.

S. 9, Z. 11—7 v. u. *Br. G.-B.*, S. 100 und 106.

S. 9, Z. 4 v. u. — S. 10, Z. 13. Vgl. *Br. G.-B.*, S. 187—188.

S. 10, Z. 18—27. *Br. G.-B.*, S. 10—11.

S. 10, Z. 14 v. u. — S. 11, Z. 2. *Br. G.-B.*, S. 32 (Brief vom 11. Sept. 1799).

S. 11, Z. 4—13. Aus Wolfgangs Autobiographie (1840), Koncz, S. 276.

Auf diese Angelegenheit bezieht sich auch ein Brief, den der junge Baron Simon Kemény am 30. Januar 1799 aus Klausenburg an Wolfgangs Vater Kaspar Bolyai gerichtet hat. Er ist von P. Szabó im Jahre 1907 veröffentlicht worden und lautet in deutscher Übersetzung:

Hochwohlgeborener Herr!

Im Juni des jüngst verflossenen Jahres [1798], als ich Göttingen verließ, blieb Ihr Sohn Wolfgang meinem Vorschlage gemäß in Göttingen zurück, das haben gewisse, hier nicht näher zu erklärende Umstände so mit sich gebracht; übrigens mit der Absicht, daß auch er im jüngst verflossenen Herbste [nach Siebenbürgen] herunterkommen solle. Als ich von Göttingen abreiste, war mein Beutel in einem solchen Zustand, daß es mir völlig unmöglich war, Wolfgang mehr Geld zurückzulassen als so viel, daß er damit bis Ende des letztvergangenen Juli auskommen konnte.

Ich hatte gehofft, ihm, bis dies Geld ausginge, wieder so viel schicken zu können, daß er im verflossenen Herbste auch damit herunterkommen könnte; in dieser meiner Hoffnung habe ich mich aber getäuscht, und ich konnte durchaus keine Möglichkeit finden, ihm zu helfen. Ich habe mich auch darauf verlassen, daß er von den Ungarn in Göttingen auf mein Konto so viel Geld bekommen könnte, daß er damit herunterkommen könnte, habe mich aber auch darin getäuscht; er hat nichts bekommen, vielleicht hatten sie selber keines — oder sie wollten ihm keines geben — *Quid quid id sit.* Wolfgang ist in einer sehr schlechten Lage, er ist seitdem dort verschuldet und kann sich ohne Hilfe nicht nur nicht rühren, sondern, wenn die Hilfe nicht rasch kommt, so gerät er in die äußerste Not, was um so drückender ist, als nach seinen letzten Briefen auch seine Gesundheit erschüttert ist. Ich war derjenige, der dem Wolfgang [1796] geraten hat, hinauf zu ziehen, und ich [riet ihm], dort zurückzubleiben, und folglich wäre es auch meine Pflicht, ihm zu helfen. Das ist wahr. Aber wenn es nicht geht? Auf meine Ehre kann ich dem Herrn schreiben, daß mein ganzes Geld, über das ich verfüge, aus 20 Rheinischen Gulden, sage zwanzig deutschen Gulden besteht, und daher kann ich nicht helfen. Auch

von Seiten meines Vaters und der Seinigen ist nichts zu hoffen, weil sie, wie ich merke, es übelnehmen, daß er in Göttingen zurückgeblieben ist. Aber wenn das auch nicht der Fall wäre, der Herr würde es mir nicht glauben, wenn ich es gleichsam auch schreiben könnte, wie wenig Geld im Hause meines Vaters vorhanden ist; also ist auch von hier nichts zu hoffen, trotz dem großen Besitz. Auch zu leihen habe ich überall versucht, jedoch nirgends etwas bekommen; das mag dem Herren wunderlich erscheinen, es ist aber doch so, und ich kenne auch die Gründe davon, kann aber nichts darüber schreiben. *Lunge Limba Bouluj. dá mág is nu styi vorovi.**)

Da die Sache nun so schlecht steht, so glaube ich, daß dem Wolfgang folgendermaßen geholfen werden könnte. Der Herr soll mir nämlich 400, d. h. vierhundert deutsche Gulden leihen, zu dem Zwecke, daß ich damit dem Wolfgang aus der Pfütze helfe. Nach höchstens 2, d. h. zwei Jahren zahle ich es dem Herren zurück, und bis dahin zahle ich 6 Prozent, d. h. sechs vom Hundert Zinsen. Dessen aber kann der Herr sicher sein, daß dabei nichts versäumt wird, auf meine Ehre gelobe ich das.

Gerne glaube ich es, daß der Herr nicht so viel Geld hat, auch daß der Herr nicht so viel geliehen bekommt, aber es gibt doch ein Mittel zur Hilfe, wenn der Herr es nur will; der Herr hat einen Grundbesitz; verkaufe doch der Herr ein Stück davon, das so viel wert ist. Der Herr wird keinen Schaden davon haben; wenn ich das Geld zurückgebe, so können Sie es zurückkaufen, wenn Sie wollen, und dennoch helfen Sie auch Ihrem Sohne; auch mir erweisen Sie eine große Wohltat. Das Geld kann aber der Herr entweder unmittelbar an Wolfgang schicken oder mir einhändigen — mir ist das gleich, nur mit dem Unterschied, daß in dem Falle, wo der Herr das Geld selbst hinausschickt und daran ein Schaden geschieht, oder es gar ganz verloren geht, bevor es in die Hände von Wolfgang gekommen ist, der Herr den Schaden zu tragen hat, und ich mich nicht als Schuldner betrachten werde; wenn aber der Herr das Geld in meine Hände niederlegt, so wird jeder Schaden, der an dem Gelde nach der Übergabe geschieht, der meinige sein. *Ceterum* ist die Art, wie das Geld hinaufzuschicken wäre, wenn der Herr selbst es wegschicken will, diese: Man muß das Geld nach Hermannstadt auf die Bank bringen, muß es dort vorzählen und bekommt statt dessen dort eine Quittung über den vorgezählten Betrag; diese Quittung schickt der Herr in einem Missionsbriefe nach Wien an irgend einen Vertrauensmann; dieser geht mit jener Quittung in die Wiener Bank und bekommt dort statt der Quittung gerade so viel Geld, als der Herr in Hermannstadt eingezahlt hat, wie viel die dort empfangene Quittung angibt. Dieses Geld trägt dann des Herren Wiener Korrespondent zu einem dortigen Großkaufmann Namens Scheidling; der gibt darüber einen kleinen Zettel, in dem er einen Göttinger Kaufmann Namens Alberti beauftragt, daß er das in Rede stehende Geld, nämlich so viel, wie bei Scheidling eingezahlt wurde, dem Wolfgang auszahlen soll. Diesen Zettel, in einem Missionsbrief verschlossen, schickt jener, der das Geld bei Scheidling eingezahlt hat, an Wolfgang nach Göttingen, dieser aber geht mit dem Zettel zu dem genannten Alberti, der ihm dann das Geld *a vista* auszahlt, jedoch nicht ganz, sondern er zieht davon je fünf vom Hundert (manchmal auch mehr) ab. Das ist die Art des Geldschickens, die dem Herren zu beschreiben ich für nötig hielt, für den Fall, daß der Herr selbst das Geld hinaufschicken will.

*) Rumänisch: *Lang ist die Zunge des Rindes, und doch kann es nicht reden.*

Wenn aber der Herr es mir anvertrauen will, und das Geld sogleich bei der Hand wäre, so bitte ich, es ruhig dem Überbringer dieses Briefes zu übergeben. Jeder nach der Übergabe eintretende Schaden ist der meinige. Wenn aber das Geld jetzt nicht bei der Hand wäre, so überliefern Sie es *quanto citius* durch einen zuverlässigen Menschen an den Herren Gubernialis Cancellista Paul Bodor nach Klausenburg. Dieser wohnt in Klausenburg in der inneren Mittelgasse, wenn man vom Mitteltore hereinkommt rechter Hand, von dem Tore aus gezählt das vierte Haus (indessen das kleine, an die Stadtmauer anbaute Häuschen nicht mitgezählt).*) In der hintersten Stube (auf dem ganzen Grundstück sind nur zwei Zimmer, und das Haus ist nur einstöckig) [wohnt Paul Bodor]. Diesem kann man das Geld ruhig übergeben; jeder nach Übergabe des Geldes diesem zustoßender Schaden ist der meinige. Jetzt antworte der Herr *sine omni mora* durch diesen Eilboten, weil dieser unter keinen Umständen warten kann. Später jedoch wollen Sie die Briefe, die Sie in dieser Angelegenheit an mich schreiben, auf dünnes Papier schreiben, dünn versiegeln, einen anderen Umschlag darüber tun und, an den genannten Paul Bodor adressiert, mit der Post nach Klausenburg gehen lassen; so bekomme ich Ihre Briefe *prompte et secure*, während sie, unmittelbar an mich gerichtet, sich leicht verirren könnten, weil ich jeden Tag wo anders wohne. Ich aber werde die an den Herrn zu richtenden Briefe an die Hermannstädter Post gehen lassen; treffen Sie Fürsorge, daß Sie diese erhalten. — Wenn dem Herrn meine Bitte vielleicht wunderlich oder ungehörig erscheint, so stellen Sie sich Ihren Sohn, und einen solchen Sohn, vor, 200 Meilen von seinem Vaterlande entfernt, ohne Geld, verschuldet und ohne Kredit, und, damit das Bild vollständig sei, kränklich; dann werden Sie, wie ich hoffe, aufhören, sich zu wundern, und alles aufbieten, um meine Bitte zu erfüllen. Wenn nur der Herr nicht auch zu dem Heere jener vielen gutherzigen Menschen gehört, die einen bedauern, aber keinen Finger rühren, um zu helfen, und nur, wenn das Unglück schon da ist, wie eine alte Vettel ein halbes Jahrhundert lang sagen: wie schade, daß es so geschehen ist. *Denique* mag der Herr zusehen; ich habe in dieser so wie in jeder anderen Sache alles getan und werde auch fürderhin alles tun, was ich tun kann und zu tun als meine Pflicht ansehen muß, und sehe in diesem Bewußtsein mit stolzer Ruhe dem Ausgang der Sache entgegen.

Ihr verbundener Diener

Klausenburg, 30. Januarii 1799. Baron Simon Kemény mpr.

P. S. Noch *sub dato* Wien, 9. August 1798 habe ich dem Herrn einen Brief geschrieben und nach Hermannstadt gerichtet; beigeschlossen war ein für den Herrn bestimmter Brief von Wolfgang. Diesen Brief müßte der Herr inzwischen selbstverständlich bekommen haben; wenn nicht, so suchen Sie ihn auf der Hermannstädter Post; *praestat sero quam nunquam.*

Dieser ganze Brief, mit allem was er enthält, soll so gewiß geheim bleiben, wie es gewiß ist, daß der Herr ein ehrenhafter Mann ist.

*) Vgl. *Br. G.-B.*, S. 44 (Brief vom 11. Nov. 1802), wo Wolfgang seine Adresse in Klausenburg angibt: Bodor *Pál urnál a belső közep utzában*, d. h. bei Herrn Paul Bodor in der inneren Mittelgasse. Diese Briefstelle hat den Ausgangspunkt für die Nachforschungen gebildet, die L. Schlesinger 1902 zur Ermittelung von Johann Bolyais Geburtshaus in Klausenburg geführt haben, vgl. seinen Bericht: *Bolyai János szülőházáról* (Über Johann Bolyais Geburtshaus), Math. és Phys. Lapok Bd. 12 (1902), S. 53.

Cetcrum. sobald ich das Geld selbst oder durch den genannten Bodor erhalte, schicke ich dem Herrn sofort darüber einen Schuldschein.

S. 11, Z. 13—6 v. u. Aus Wolfgangs *Autobiographie* (1840), Koncz, S. 276.

Zum III. Kapitel

S. 13, Z. 2—9, 11—6 v. u. Aus Wolfgangs *Autobiographie* (1840), Koncz, S. 277.

S. 13, Z. 5 v. u. — S. 14, Z. 4. *Br. G.-B.*, S. 39.

S. 14, Z. 7—17. Aus Bedőhazi, S. 59, 58.

S. 14, Z. 18—22. Ein Konvolut mit 35 Briefen Wolfgangs an P. Bodor aus den Jahren 1815—1826 findet sich im Besitz des Herrn L. Bodor in Klausenburg. Auszüge daraus hat L. Schlesinger in den Mathematikai és Physikai Lapok, Bd. 11 (1902), S. 197—230 veröffentlicht und später einige besonders wichtige Stellen in deutscher Übersetzung als *Neue Beiträge zur Biographie von Wolfgang und Johann Bolyai*, Bibliotheca math. (3) 4 (1903), S. 260—270 mitgeteilt.

S. 14, Z. 18—10 v. u. Aus Johanns Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856).

S. 14, Z. 10—8 v. u. Koncz, S. 303—304.

S. 14, Z. 4—1 v. u. Aus Wolfgangs *Autobiographie* (1840), Koncz, S. 278.

S. 15, Z. 1—7, *Br. G.-B.*, S. 39—40.

S. 15, Z. 16—17. Dieses Haus ist im Jahre 1902 von L. Schlesinger ermittelt worden und trägt seit dem 15. Januar 1903 eine Gedächtnistafel; vgl. S. 204 des Textes und die zugehörige Anmerkung, sowie S. 213, Fußnote.

S. 15, Z. 19—22, 26—28. *Br. G.-B.*, S. 49, 57.

S. 15, Z. 22—26. L. Schlesinger, *Johann Bolyai*, Festrede, gehalten bei der von der königl. ungarischen Franz-Josephs-Universität veranstalteten Bolyai-Feier am 15. Januar 1903, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 12 (1903), S. 165—194, vgl. im besonderen S. 167.

S. 15, Z. 7—5 v. u. *Br. G.-B.*, S. 65.

S. 15, Z. 2—1 v. u. Vgl. S. 60 des Textes.

Zum IV. Kapitel

S. 16, Z. 11—20 *Br. G.-B.*, S. 57.

S. 17, Z. 1—8. Vgl. J. Koncz, *A marosvásárhelyi evang. reform. kollegium története* (Geschichte des ev. ref. Kollegiums zu Maros-Vásárhely), Maros-Vásárhely 1896, 774 S. Die einzelnen Abschnitte dieses Werkes sind nach einander 1883—1888 und 1894—1896 in den Schulnachrichten des Kollegiums erschienen.

S. 17, Z. 16—12 v. u., 5—1 v. u. *Br. G.-B.*, S. 101, 58.

S. 18, Z. 4. Das Verzeichnis ist im Besitz des Hrn. P. Szabó in Budapest.

S. 18, 16—19. Genaueres hierüber findet man im VI. Kapitel, S. 44—46.

S. 18, Z. 20—24. Aus Wolfgangs *Autobiographie* (1840), Koncz, S. 278.

S. 18, Z. 17—11 v. u. *Br. G.-B.*, S. 86.

S. 19, Z. 5—10. Koncz, S. 301.

S. 19, Z. 15—31. I. Kont, *Geschichte der ungarischen Literatur*, Leipzig 1906, S. 146; vgl. auch das in der Anmerkung zu S. 5, Z. 17—21 angeführte Buch von F. Riedl, S. 286—287.

S. 19, Z. 11 v. u. — S. 20, Z. 2, Alexander Imre, *A magyar irodalom története* (Geschichte der magyarischen Literatur), herausgegeben von Zs. Beöthy, Bd. II, S. 188.

S. 20, Z. 9—18. Anmerkung in magyarischer Sprache, *Tentamen*, T. I, S. V, Editio secunda, T. II, S. 405.

S. 20, Z. 10—7 u. v. *Br. G.-B.*, S. 40.

S. 20, Z. 3—1 v. u. Brief Wolfgangs an Sartorius von Waltershausen, *Br. B.-G.*, S. 153.

S. 21, Z. 1—8. Vgl. die Anmerkung zu S. 5, Z. 17—21.

S. 22, Z. 7—11. Eine deutsche Übersetzung des Trauerspiels Bánk von A. Dux ist 1858 in Leipzig erschienen; neuerdings ist das Stück im Deutschen Theater zu Berlin aufgeführt worden.

S. 22, Z. 12—22. Vgl. das in der Anmerkung zu S. 5, Z. 17—21 angeführte Buch von F. Riedl, S. 289

S. 22, Z. 12—10 v. u. *Br. G.-B.*, S. 155.

S. 22, Z. 8—4 v. u. Der Holzbecher mit der Asche der verbrannten Entwürfe wird in der Bibliothek des ev.-ref. Kollegiums zu Maros-Vásárhely aufbewahrt.

S. 22, Z. 8 v. u. — S. 23, Z. 4. Aus Wolfgangs *Autobiographie* (1840), Koncz, S. 278.

S. 23, Z. 6—36. Bedőházi, S. 105—107, 141.

S. 23, Z. 16—18. Sartorius v. Waltershausen, *Gauss zum Gedächtnis*, Leipzig 1856, S. 17.

S. 24, Z. 1—4. Bedőházi, S. 276.

S. 24, Z. 6—25. Szily, S. 9—10. Im Nachlaß Wolfgangs befindet sich ein $5\frac{1}{2}$ eng beschriebene Bogen starkes Manuskript über Musik, das demnächst im Bd. 22 der Mathematikai és Physikai Lapok abgedruckt werden wird.

S. 24, Z. 8—5 v. u. Einige seiner Ofen-Konstruktionen hat Wolfgangs ehemaliger Schüler Wolfgang Horváth beschrieben; vgl. Bedőházi, S. 322 und Schlesinger, *Neue Beiträge*, S. 264.

S. 24, Z. 1 v. u. — S. 25, Z. 8. Koncz, S. 313.

S. 25, Z. 9—25. Außer Koncz, S. 298, Bedőházi, S. 76, Szily, S. 6 und Schlesinger, *Neue Beiträge*, S. 264 sind Mitteilungen benutzt worden, die ich Herrn P. Szabó in Budapest verdanke.

S. 26, Z. 11—27. Bedőházi, S. 333—334. Dieser bringt auch drei Bildnisse von Wolfgang: als Titelbild die Nachbildung einer Photographie, die Wolfgang auf dem Totenbett darstellt, neben S. 32 das bereits in der Anmerkung zu S. 5 erwähnte Selbstporträt und neben S. 272 die Wiedergabe eines Ölbildes, das Johann Szabó in Maros-Vásárhely gemalt hatte, als Wolfgang fünfzig Jahre alt war (1835); das Bild ist später an Wolfgangs Sohn Gregor gekommen, vgl. Bedőházi, S. 333. Eine verbesserte Kopie dieses Bildes befindet sich im Besitz der Ungarischen Akademie der Wissenschaften zu Budapest; eine Nachbildung davon ziert den ersten Band der neuen Ausgabe

des *Tentamens* (1897). Endlich hatte Baron Simon Kemény seinen Jugendfreund im Jahre 1825 malen lassen; dieses Bild befand sich 1897 im Besitz des Barons Koloman Kemény zu Vécse (Bedőházi, S. 333); über seinen Verbleib hat sich leider nichts ermitteln lassen.

Zum V. Kapitel

S. 27, Z. 11—10 v. u. In der Vorrede zum *Tentamen*, Ed. sec., T. I, S. 3 sagt Wolfgang (in deutscher Übersetzung): „Die Grundlagen zu diesem *Tentamen* hatte ich, als ein noch unbärtiger Jüngling, gelegt, kaum mit Bruchstücken der ersten Elemente oberflächlich bekannt, auf eigenen Antrieb, ohne irgend ein anderes Ziel, als daß ich, von innerem Durste nach der Wahrheit geleitet, die Quelle selbst suchte."

S. 27, Z. 6—1 v. u. Koncz, S. 284.

S. 30, Z. 16—6 v. u. Bedőházi, S. 267.

S. 30, Z. 4 v. u.— 31. Z. 10. *Br. G.-B.*, S. 115, 116, 117.

S. 31, Z. 11—29. *Br. G.-B.*, S. 123.

S. 31. Z. 14—15. Karl Nagy v. Szopor (1797—1868) hatte Astronomie studiert und war Assistent an der Wiener Sternwarte gewesen. Nach längerem Aufenthalt im Ausland kehrte er in die Heimat zurück und baute sich in Bicske im Stuhlweißenburger Komitat eine Sternwarte, die er 1848 dem Staate schenkte. Später hat er in Paris gelebt. Seit 1832 war er Mitglied der Ungarischen Akademie. Er veröffentlichte zunächst in deutscher Spreche *Elemente der Arithmologie und Arithmetographie*, zwei Bände, Wien 1835—1837. Ihnen folgten die im Text erwähnten *Elemente der Algebra* in magyarischer Sprache, Wien 1837. Nagy hat auch noch zwei Elementarbücher, *Der kleine Rechner*, Wien 1837 und *Der kleine Geometer*, Wien 1838 in seiner Muttersprache herausgegeben.

S. 31, Z. 11—3 v. u. *Br. G.-B.*, S. 127.

S. 31, Z. 3 v. u.—S. 32, Z. 11. Über Mentovich vgl. S. 135 des Textes.

S. 32, Z. 1—11. F. Mentovich, *Naplótöredékek* (Tagebuchfragmente) IV in der Nummer vom 30. August 1844 der Zeitschrift Nemzeti Társalkodó, neu herausgegeben von J. Kürschák, Mathematikai és Physikai Lapok, Bd. 11 (1902), S. 90.

S. 32, Z. 12—15. Den Namen Bolyai hatte Gerling schon im Jahre 1832 von Gauss gehört, als dieser ihm einige Zeilen über Johanns *Appendix* schrieb (vgl. S. 72 dieses Teiles). Später hatte er bei Gauss in Göttingen ein Buch von Bolyai gesehen, das jener interessant nannte (Brief an Gauss, vom 18/21. Dezember 1843, Werke, Bd. VIII, S. 234). Als darauf ein paar ungarische Stipendiaten aus Maros-Vásárhely nach Marburg kamen, bat Gerling einen davon, ihm die Bücher von Vater und Sohn zu verschaffen, was dieser aber vergaß. Nachdem er vergeblich versucht hatte, die Titel dieser Bücher zu erfahren, ersuchte er am 18/21. Dez. 1843 Gauss um Auskunft. Gauss erfüllte seine Bitte am 4. Febr. 1844 (Werke. Bd. VIII, S. 235) und teilte ihm die ausführlichen Titel mit. Wie es scheint, hat sich Gerling später wegen der Bücher an Wolfgang selbst gewendet, denn dieser hat ihm nach Bedőházi im Jahre 1853 ein Exemplar des *Tentamens* zugeschickt. Gerling bedankte sich zunächst in einem kurzen Briefe, dem er nach anderthalb Jahren ein längeres Schreiben folgen ließ. In diesem Schreiben vom 31. Oktober 1854 heißt es:

„Meine früheren Beschäftigungen mit der Parallelentheorie erwähne ich nicht, denn schon im Jahre 1810—1812 hatte ich bei Gauss, sowie früher 1809 bei J. F. Pfaff, einsehen gelernt, wie alle bisherigen Versuche, das Euklidische Axiom zu beweisen, mißlungen waren. Ich hatte dann auch vorläufige Kenntnis von Ihren Arbeiten erhalten, und so schon, als ich zuerst 1820 etwas von meiner Ansicht darüber drucken lassen mußte, es genau ebenso geschrieben, wie es S. 187 der neuesten Ausgabe noch zu lesen steht."

Gerling meint hier die Bearbeitung des Lorenzschen *Grundrisses der Mathematik*, die er 1820 besorgt hatte; die im Briefe erwähnte neueste Ausgabe war 1851 erschienen vgl. Gauss, Werke, Bd. VIII (1900), S. 178—179, wo auch die betreffende Stelle aus dem Grundriß abgedruckt ist.

„Wir hatten gegen diese Zeit [1819] hier einen juristischen Professor Schweikart, welcher ehemals in Charkow gewesen war, und auf ähnliche Ideen gekommen war, indem er ohne Hilfe des Euklidischen Axioms eine Geometrie, die er *Astralgeometrie* nannte, in ihren Anfängen entwickelte. Was er mir darüber mitteilte, schickte ich Gauss, der dann mitteilte, wie viel weiter man schon auf diesem Wege gekommen und später auch sich über den großen Gewinn erklärte, der in dem *Appendix* zu Ihrem Buche den wenigen Sachkennern dargeboten ist."

Über Schweikart vgl. Stäckel und Engel, Th. d. P., S. 243—246, sowie Gauss, Werke Bd. VIII (1900), S. 180—182. über den Brief von Gauss an Gerling in Betreff des Appendix von Johann Bolyai S. 72 dieses Teiles und Gauss, Werke, Bd. VIII (1900), S. 220.

Wolfgang ließ den Brief von Gerling seinem Sohn Johann zukommen, der sich unter dem 20. Januar 1855 darüber folgendermaßen äußerte: „Gerling ist, wie ich nicht zweifle, ein Gelehrter nach der Mode und vielleicht auch mit einigem Sinn begabt für Dinge, die nach unserem Geiste sind (wovon ich aber in seinem Briefe fast kein Anzeichen sehe); auf alle Fälle schätze ich auch das, nach [dem Maße] der Fähigkeit, auf das Gute hin gerichtete ehrliche Streben und freue mich, wenn von unserem Werke auch nur ein Funke in seine Seele gesprungen ist; überhaupt schätze ich jeden ehrlichen Menschen nach seinem Verdienst. Ettingshausen schätze ich auch als vielverdienten und distinguierten Mann, obgleich er wohl recht unglücklich, blind und befangen genug ist, um uns nicht würdigen zu können." Die letzten Worte erklären sich daraus, daß das *Tentamen* sogleich nach dem Erscheinen auch an Ettingshausen nach Wien geschickt worden war, dieser sich aber durchaus absprechend geäußert hatte; auf sein Urteil beziehen sich auch verschiedene Stellen in Johannes nachgelassenen Aufzeichnungen. (Vgl. auch die Anmerkung zu S. 72, Z. 16—14 v. u.)

S. 33, Z. 10 v. u. W. R. Hamilton, *Preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time*, Transactions of the Royal Irish Academy, vol. 17. Dublin 1837, S. 299—392 (read. Nov. 4 1833). Über Kants Lehre von der Zeit vgl. auch G. Wallenberg, Wissenschaftliche Beilage zum Programm der neunten Realschule. Berlin 1896, sowie A. Voss, *Über das Wesen der Mathematik*, 2. Aufl., Leipzig 1913, S. 33.

S. 34, Z. 16—19. H. Hankel, *Theorie der komplexen Zahlensysteme*, Leipzig 1867.

S. 34, Z. 14—1 v. u. *Tentamen*, Editio secunda, T. II, S. LVII.

S. 35, Z. 4—21. *Tentamen*, Ed. sec. T. I, S. 121.

S. 35, Z. 15 v. u. Vgl. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Band I, S. 11, *Encyclopédie des sciences mathématiques*, Tome I, vol. 1, S. 25; vgl. auch A. Voss, *Über das Wesen der Mathematik*, 2. Aufl., Leipzig 1913, S. 37 und 39.

S. 37, Z. 15—13 v. u. G. Cantor, *Über unendlich lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Math. Annalen, Bd. 21 (1883), S. 575; vgl. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. I, Teil 1, S. 201.

S. 37, Z. 3—1 v. u. Wie das *Tentamen* im Jahre 1886 beurteilt wurde, zeigen die Ausführungen, die Brassai in seiner Gedächtnisrede auf Wolfgang gemacht hat.

„Das *Tentamen*, eine bewundernswerte Enzyklopädie, — ja, der codex der theoretischen Mathematik, ein festes, solides Gebäude, das auf ausgedehnte und sichere Fundamente gelegt ist, und von dem alle Stücke so ineinander gefügt sind, daß es unmöglich ist, ohne Gefährdung der Sicherheit und der Symmetrie auch nur einen Stein hinwegzunehmen oder hinzuzufügen, — die verkörperte Philosophie der Mathematik, die einzig in ihrer Art ist. . . . Die Anzahl solcher Lehren, Theoreme und Probleme ist nur gering, die es nicht von einer mehr oder weniger neuen Seite beleuchtet, sodaß auch der Sachverständige des Werk mit Nutzen liest."

„Der Gelehrte sucht in einem solchen Buche zwei Dinge: 1. Kunstgriffe, die bisher ungelöste Aufgaben lösen oder den schwierigen und langen Gang der Lösung vereinfachen, 2. allseitig befriedigende Beantwortung von Fragen, über die man noch in Zweifel ist. Derartige Fragen sind: 1. Die der negativen Zahlen und Größen, die die Bibliothek (so könnte man sagen), welche darüber geschrieben worden ist, nicht ins Reine bringen konnte. Den Stein, den Carnot in den Weg rollte, hat noch niemand ganz entfernt. Bolyai unterscheidet das Positive und Negative vom Addendus und Subtrahendus nicht nur begrifflich, sondern auch symbolisch; Dumas hält den absoluten Begriff der negativen Zahl für sinnlos. Die Sache ist von niemand zum Abschluß gebracht worden; Julius Konig, Professor und Mitglied der Akademie, befaßt sich in seiner vor kurzem herausgegebenen *Algebra* auf einigen Seiten mit der Besprechung des Begriffes der negativen Größen. — 2. Die Lehre von den imaginären Größen ist auch noch heute unvollkommen, trotz den Auseinandersetzungen von Cauchy, Kerekes, Bolyai und trotz dem Ausdruck *transversalis* von Gauss, mit dem er den Knoten, wie Alexander den gordischen Knoten, durchhauen zu haben glaubte. — 3. Jeder Beweis des Satzes, daß eine numerische Gleichung so viele Wurzeln hat, wie der Grad der Gleichung beträgt, bis zu den Riemannschen Flächen, bezeugt nur, daß die Mathematiker mit den früheren Beweisen nicht zufrieden gewesen sind. — 4. Das wahre Wesen der Differentiale hat auch weder Newtons Fluxion noch Leibnizens Unendlich-Kleines erklärt, ebensowenig wie Eulers *Nichts und dennoch etwas*, die Derivierte von Lagrange, das zustande kommende und verschwindende Verhältnis und der Begriff der Grenze. — 5. Endlich ist auch die Lehre von den Parallelen bis auf den heutigen Tag nicht ins Reine gebracht."

„Die wissenschaftliche Welt erwartet Aufklärungen über diese schwebenden Fragen und die Entscheidung in strittigen Dingen. Das *Tentamen* bietet bezüglich jener wenig, bezüglich dieser nichts."

Zum VI. Kapitel

S. 38, Z. 8—10. *Br. G.-B.*, S. 96.

S. 38, Z. 11—3 v. u. Siehe S. 29 des zweiten Teiles dieses Buches.

S. 39, Z. 7. Friedrich Überweg, *Die Principien der Geometrie*, wissenschaftlich dargestellt, Archiv für Philologie und Pädagogik, Bd. 17 (1851); eine französische Übersetzung dieser Abhandlung hat Delboeuf seinen *Prolégomènes philosophiques de la géométrie*, Lüttich 1860 beigegeben. Vgl. auch W. Killing, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, Bd. 2, Paderborn 1898, S. 204, 358. Ein Vorläufer von Überweg, den dieser auch anführt, ist K. A. Erb, *Zur Mathematik und Logik. Vorspiele zu ihrer Erweiterung und Begründung*, Erste Lieferung, Heidelberg 1821. — H. Helmholtz, *Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie*, Verhandlungen des naturhist.-mediz. Vereins zu Heidelberg, IV, 1868, S. 197—202, V, 1869, S. 31—32; *Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen*, Göttinger Nachrichten, 1868; *Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze*, in englischer Übersetzung im Mind 1879 veröffentlicht. Alle drei Abhandlungen sind wieder abgedruckt in den *Wissenschaftlichen Abhandlungen* Bd. 2, Leipzig 1883, S. 610—660. Vgl. hierzu L. Koenigsberger, *Hermann v. Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik*, Leipzig 1896 sowie W. Killing, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, Bd. 2, Paderborn 1898, S. 329, 361.

Auf die Ähnlichkeit der Betrachtungen von Helmholtz und Wolfgang Bolyai hat bereits J. Suták in der Einleitung zu seiner magyarischen Übersetzung des *Appendix* von Johann Bolyai (1907) hingewiesen (S. XIV—XVI).

S. 39, Z. 8—7 v. u. Euklid vermeidet die Benutzung der Bewegung, er macht davon nur zum Beweise des ersten Kongruenzsatzes (Buch I, 4) und seiner Umkehrung (I, 8) Gebrauch.

S. 40, Z. 18—19. Schon bei G. W. Leibniz finden sich Ansätze nach dieser Richtung, siehe *Mathematischen Schriften*, herausgegeben von C. J. Gerhardt, Bd. 5, Halle 1858, S. 183; vgl. auch Max Simon, *Euclid und die sechs planimetrischen Bücher*, Leipzig 1901, S. 20. Ferner ist zu nennen Fourier, Séances des écoles normales, IIe partie, débats, t. 1, (1795) S. 28. Aus dem 19. Jahrhundert seien hier nur erwähnt: C. A. Grashof, *Theses sphaerologiae, quae ex sphaerae notione veram rectae lineae sistunt definitionem*, Berlin 1806 und desselben Verfassers Abhandlung *Über die ersten Begriffe der Geometrie*, Programm des Karmeliter-Gymnasiums, Cöln 1826, ferner die *Geometrischen Abhandlungen* von N. I. Lobatschefskij, die F. Engel in deutscher Übersetzung herausgegeben hat, Leipzig 1898, endlich die große Arbeit von M. Pieri, *La geometria elementare istituita sulle nozioni di „punto" e „sfera"*, Memorie di matematica e fisica della Società Italiana delle science (detta dei XL), (3) 15 (1908), S. 345—450. Für die Kritik dieser Bestrebungen vgl. W. Killing, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, Bd. 2, Paderborn 1898, 7. Abschnitt, besonders S. 186.

S. 40, Z. 24. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Göttingen 1899, 4. Auflage Leipzig 1913; M. Pasch, *Vorlesungen über Neuere Geometrie*, Leipzig 1882, 2. Auflage 1912; Peano, *Sui fondamenti di geometria*, Rivista di Matematica, 4 (1894), S. 51—90; F. Schur, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1909.

S. 40, Z. 1—5 v. u. M. Réthy, *Endlich gleiche Flächen*, Mathematische Annalen, 38 (1891), S. 405, *Über endlich gleiche Flächen*, ebenda, 42 (1893), S. 297; *Zum Beweise des Hauptsatzes über die Endlichgleichheit zweier ebenen Systeme*, ebenda, 45 (1894), S. 471; vgl. auch H. Dobriner, *Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn Réthy über endlich gleiche Flächen*, ebenda, 42 (1893), S. 275; *Der Satz: „Congruentes von Congruentem gibt Gleiches" in seiner Anwendung auf ebene Flächen*, ebenda, S. 285. Weitere Literatur über endlich gleiche Flächen und Raumstücke findet man bei R. Bonola *Index operum ad geometriam absolutam spectantium*, Libellus etc Claudiopoli 1902, S. 129—130.

S. 41, Z. 13—27. Max Simon, *Euklid und die sechs planimetrischen Bücher*, Leipzig 1901, S. 34.

S. 41, Z. 11—10 v. u. Vgl. etwa Stäckel und Engel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß*, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig 1895, Bonola und Liebmann, *Die nichteuklidische Geometrie*, historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung, Leipzig 1908, sowie F. Enriques, *Prinzipien der Geometrie*, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band III, Teilband 1, Heft 1, (1907).

S. 41, Z. 1 v. u.—S. 42, Z. 3. F. K. Schweikart, *Die Theorie der Parallellinien*, Jena und Leipzig 1807, S. 6.

S. 42, Z. 3—5. G. S. Klügel, *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent* Abrah. Gotthelf Kaestner et auctor respondens Georgius Simon Klügel, Göttingen 1763; vgl. Stäckel und Engel, Th. d. P., S. 140.

S. 42, Z. 13 v. u.—S. 43, Z. 16. *Br. G.-B.* S. 193—194.

S. 43, Z. 18. G. Saccheri, *Euclides ab omni naevo vindicatus*: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia, Mailand 1730. Das erste, auf die Parallelentheorie bezügliche Buch findet man in deutscher Übersetzung bei Stäckel und Engel, *Th. d. P.*, S. 41—136. — J. H. Lambert, *Theorie der Parallellinien* (aufgesetzt im Sept. 1766), Magazin für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 1. (1786), wieder abgedruckt bei Stäckel und Engel, *Th. d. P.*, S. 152—208.

C. Segre hat in der Abhandlung *Congetture intorno alla influenza di Girolamo Saccheri sulle formazione della geometria non-euclidea*, Atti della academia delle scienze di Torino, Bd. 38 (1903), S. 535—546 die Vermutung ausgesprochen, Wolfgang Bolyai habe während seines Aufenthaltes in Göttingen Saccheris Werk entweder gelesen oder doch davon gehört, später habe er von den Saccherischen Gedanken seinem Sohne Mitteilung gemacht und so sei Saccheri wenigstens mittelbar von Einfluß auf die Entdeckung der absoluten Geometrie durch Johann Bolyai geworden. Positive Gründe für diese Vermutung vermochte Segre, wie er selbst zugibt, nicht beizubringen, vielmehr hielt er genauere Nachforschungen für erforderlich. Wie die Kapitel VI und X dieses Buches zeigen, ist das Ergebnis dieser genaueren Nachforschungen durchaus negativ gewesen; für Johann vgl. auch die Anmerkung zu S. 43, Z. 25—28.

S. 43, Z. 20—23. Daß in den Kreisen der Schüler von Gauss die Lambertsche Abhandlung bekannt war, zeigt ein Brief von Bessel an Encke vom 9. Juli 1821, der sich jetzt im Besitz der Berliner Akademie der Wissenschaften

befindet: dort heißt es: „In Gotha sagten Sie mir etwas von einer Abhandlung Lamberts über die Parallelen; ich habe vergessen, wo diese sich findet, und kann sie, aller Mühe ungeachtet, nicht entdecken. Sie erzeigen mir eine große Gefälligkeit, wenn Sie mir eine nähere Nachricht darüber geben, denn diese Sache fängt an, mich sehr zu interessieren. Vergessen Sie ja nicht, mir hierauf zu antworten." Der Brief Enckes an Bessel vom 13. Oktober 1821 enthält die gewünschte Auskunft. Nachdem Gauss in einem Briefe an Bessel vom 27. Januar 1829 Andeutungen über seine Untersuchungen in Betreff der Gründe der Geometrie gemacht hatte, antwortet dieser am 10. Februar 1829 (Werke, Bd. VIII, S. 201): „Durch das, was Lambert gesagt hat, und was Schweikart mündlich äußerte, ist mir klar geworden, daß unsere Geometrie unvollständig ist, und eine Korrektion erhalten sollte, welche hypothetisch ist, und, wenn die Summe der Winkel des ebenen Dreiecks $= 180^0$ ist, verschwindet." Gauss äußert darauf (Brief vom 9. April 1830, Werke, Bd. VIII, S. 201) seine Freude über die Leichtigkeit, mit der Bessel auf seine Ansichten über die Geometrie eingegangen sei, „zumal da so wenige offenen Sinn dafür haben." Auf Lambert und Schweikart geht er nicht ausdrücklich ein; Schweikarts Gedanken waren ihm bekannt, weil er im Januar 1819 durch Vermittelung von Gerling eine darauf bezügliche Notiz von Schweikart, damals in Marburg, seit 1821 in Königsberg, erhalten hatte (Werke, Bd. VIII S. 180). Übrigens hat Gauss ein Werk besessen, in dem Saccheri und Lambert erwähnt werden, nämlich J. W. H. Lehmann, *Mathematische Abhandlungen* betreffend die Begründung und Bearbeitung verschiedener mathematischer Theorieen, nebst Idee eines Systems der Wissenschaft, Zerbst 1829; vgl. P. Stäckel, *Franz Adolph Taurinus*, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik Heft IX (1899) S. 423—427.

S. 43, Z. 25—28. Was Johann Bolyai von der Geschichte der Parallelentheorie bekannt war, hat er im Vorwort zur *Raumlehre* (um 1834) dargestellt; es unterliegt keinem Zweifel, daß auch Wolfgangs Kenntnisse auf diesem Gebiete nicht weiter gereicht haben als die seines Sohnes. Die Ausführungen Johanns sind so wichtig, daß sie hier wortgetreu mitgeteilt werden sollen.

„Die hier folgende Lehre, wenigstens insofern sie sich auf die Berechnung der Dreiecke und anderer Figuren bezieht, dabei die Grundbegriffe und -Eigenschaften der Ebene und der Geraden ausschließt, erschien in den Grundzügen bereits zu Anfang des Jahres 1831 in lateinischer Sprache und wurde mit Ausnahme einiger weniger, selbständig gelassener und zum Teile so für sich verschickter Exemplare dem erst gegen Ende von 1833 ganz zustande und heraus gekommenen ersten Bande des Werkes: *Tentamen juventutem studiosam* etc. Maros Vásárhelyini 1832 angehängt; gegenwärtige Darstellung enthält viele Verfeinerungen und sehr wesentliche, höchst wichtige Zusätze: es wurde nichts versäumt, selbe der höchsten Vollendung möglichst nahe zu bringen. Ist indessen jemand im Stande, hieran noch etwas zu verbessern, so wird es, so wie ihn, auch mich freuen. Im Besitze der Hauptresultate dieser Theorie bin ich bereits seit über 10 Jahre. Übrigens dürften hier noch einige geschichtliche Bemerkungen über diesen Gegenstand am rechten Orte stehen für diejenigen, die sich mit der früheren Behandlung dieser Materie bekannt zu machen wünschen und sich dadurch auf den rechten Standpunkt stellen, woraus das Neue hier von dem bereits Vorhandenen genau unterschieden werden kann. Man muß sich wundern, daß unter der großen Menge zum Teil sehr vortrefflicher Männer, z. B. ein Legendre, Euklid selbst, Archimed, *keiner* den Schlüssel zu dieser Schatz-

kammer fand — ungeachtet des eifrigsten Nachforschens. [Lücke in der Handschrift] . . . . noch jene von Clavius oder eigentlich ursprünglich des Arabers Nassir-Eddin, der drei Sätze annahm, etc., welche mit scharfsinnigen Änderungen auch in des Freiherrn von Hauser *Anfangsgründe der Mathematik* [1. Teil, Wien 1778] aufgenommen ist. Der berühmte Hausen soll neun Jahre hindurch den Kopf über Euklids XI. Axiom [zerbrochen haben] und war am Ende nicht gar eben weit von dem § 1 [des Appendix] (drei erste Zeilen), welche Idee er aber doch gar nicht klar faßte, viel weniger den Nutzen davon für das zukünftige Gebäude, daß es der einzige Zugang sei, von wo aus man in alle Winkel dieses stockfinsteren Labyrinthes, ohne je zur Rückkehr gezwungen zu sein, komme, glücklich einen endlichen Ausgang zu finden; [vielmehr hatte er das Mißgeschick] das eine Ende des Fadens zu lösen, welcher sich hierin zu einem gordischen klumpenhaften Knoten verwickelte."

„Der bekannte Robert Simson nahm an, eine etc. Lacroix legte den Satz etc., welcher nur ein einfacherer, besonderer Fall des XI. Axioms ist, zugrunde und leitete daraus mit noch einigen Mängeln die Parallel-Theorie her, übrigens irrig wähnend, jener Satz stelle sich unmittelbar aus der Anschauung der geraden Linie als evident dar (was auch Clavius elegant und gut leistete). Aber einen anderen von Bertrand herrührenden Satz trägt Lacroix in der Anmerkung zu seinem Grundsatz vor, der der erste seiner Art (außer bis zum *Tentamen*) war und den Lacroix für vollkommen hält. Wenn das ist, welch' schwache Einsicht verrät es in die Materie, daß er es gleichsam nur nebenbei nachträglich hinwirft, nachdem er seine Theorie auf eine prekäre Annahme gebaut hat."

„Der große Legendre lieferte nebst einem so schlechten älteren Beweis, daß man sich nicht genug darüber wundern muß, von einem so scharfsinnigen Kopfe so etwas entsprungen zu finden, einen eleganten Beweis des Satzes etc., aber an dem Beweise, daß etc., scheiterte sein Schiff."

„Proclus, Hauff, Bossut, Kircher, Schmidt, Schwab, Tacquet, Karsten, Hindenburg, unlängst Bürger leisteten hierin, die Wahrheit freimütig und um ihrer selbst willen herausgesagt, so gut wie Nichts. Daß, unter einer Menge anderer alter Geometer der älteren und ältesten Zeiten, auch Euklid selbst seine Kräfte hieran nicht unversucht ließ und er sich damit in der Tat geplagt haben müsse, erhellt wohl sattsam daraus, daß er den Satz in verschiedenen Ausgaben der *Elemente* bald unter die Grundsätze, bald (in den alten Handschriften) unter die Forderungen stellte, zum hinlänglich deutlichen Beweise, daß er selbst nicht recht wußte, wie er ihn behandeln und taufen solle. Zudem kann man ohne dies kaum umhin, einer solchen Strenge und einem solchen Geiste, als bei ihm herrscht, nicht zuzumuten, daß er ihn erst da (nach fruchtlos angestellten Versuchen), wo er sich unvermögend fühlte, einen Beweis davon zu finden, also notgedrungen beweislos dahinstellte und ihm hier und dort den schicklichsten Namen und Platz suchte."

„Archimeds Versuch soll verloren gegangen sein, was gar höchlich zu bedauern ist, indem es wohl jedem Geometer, der den Kopf in Ordnung und das Herz auf dem rechten Fleck hat und mit der Geschichte der Wissenschaft gehörig bewandert ist, mehr als alle übrigen Versuche interessant sein müßte zu erfahren, was der große griechische Hellseher in dieser so delikaten Materie leistete. Denn beweisen können hat er ihn nicht; dies ist nunmehr ausgemacht, weil es dazu keinen Beweis gibt. Und andererseits setzt man wohl auch von

Archimedes nicht leicht und gern voraus, daß er einen fehlerhaften Beweis für vollendet ausgegeben hätte. Er mag es, denn das ist mir am wahrscheinlichsten, höchstens so weit gebracht haben als P[ater], obgleich ich überzeugt bin, daß seine Darstellungen mehr destilliert, einfacher und eleganter waren. Endlich will ich unter der großen Menge der Prätendenten in den neuesten und gegenwärtigen Zeiten weiter unten nur noch einen nennen."

„In diesem Zustande, das ist noch in einem sehr wenig kultivierten Zustande, befand sich das XI. Axiom, denn man kann mit vollem Recht behaupten, bei aller Menge der diesfälligen Versuche, die den Scharfsinn der vortrefflichsten Geometer, bei dem rastlosesten Eifer, während des Verlaufes von wenigstens 2100 Jahren so vergeblich in Anspruch genommen haben, wurde doch nicht ein *einziger eigentlicher*, gegen das Ziel näher führender *Schritt* getan, — als ich, durch die ganz eigene Vortrefflichkeit und hohe Wichtigkeit der Aufgabe gereizt, den verzweifelten, von vielen vielleicht tollkühn genannt werdenden Schritt wagte, es sei wie es will, *mein Möglichstes* hierin zu tun, danach zu streben, so weit es in meinem Kräften stände, indem ich dafür hielt, das man der Natur keinen Zwang antun, die Natur nach keinen phantastisch gebildeten Hirngespinsten modeln, sondern vernünftiger und natürlicher Weise eben die Wahrheit oder Natur selbst sehen wollen muß, und daß man zufrieden sein müsse mit der *bestmöglichen* Darstellung."

Die geschichtlichen Angaben Johanns entstammen zum größten Teil einer Schrift von Joh. Jos. Ign. Hoffmann, *Kritik der Parallelen-Theorie*, Jena 1807, die Johann in einer an den Erzherzog Johann gerichteten Eingabe vom Jahre 1832 erwähnt; vgl. S. 231. Außerdem kannte er das Buch von Bürger, *Vollständig erwiesene von den ältesten Zeiten bis jetzt noch unberichtigt gewesene Theorie der Parallellinien*, Heidelberg 1833.

S. 43, Z. 9 v. u. — S. 44, Z. 10. *Br. G.-B.*, S. 65. Wolfgangs *Göttingische Parallelentheorie* ist zuerst von Stäckel und Engel in den Mathematischen Annalen, Bd. 49 (1897), S. 168—205 zusammen mit einer deutschen Übersetzung veröffentlicht worden. Ein zweiter Abdruck der *Theoria Parallelarum* findet sich *Br. G.-B.* S. 67—74. Endlich eröffnet eine deutsche Übersetzung den zweiten Teil dieses Buches, S. 5—15.

S. 44, Z. 17 — S. 45, Z. 7 v. u. *Br. G.-B.*, S. 81—83.

S. 45, Z. 6 v. u. — S. 46, Z. 16. *Br. G.-B.*, S. 85—86.

S. 46, Z. 20—32. *Br. G.-B.*, S. 96. Bei der Herausgabe des Briefwechsels zwischen Gauss und Wolfgang Bolyai (1899) hatte ich der *Theoria Parallelarum* (S. 67—74) sogleich das *Supplementum ad Theoriam parallelarum* folgen lassen (S. 75—78), weil die im Gauss-Archiv aufbewahrten Originale diese Reihenfolge aufweisen. Schon damals hatte ich jedoch (Anmerkung, S. 190) es als auffallend bezeichnet, daß Gauss in seinem Briefe vom 25. November 1804 auf das *Supplementum* mit keinem Worte eingehe, weil dieses genau an der Stelle der *Theoria Parallelarum* einsetzt, die Gauss mit Recht bemängelt. Dazu kommt, daß Wolfgang jedenfalls am 27. Dezember 1808 (S. 96) einen Beweisversuch an Gauss geschickt hat; bei der großen Sorgfalt, mit der Gauss die Briefe seines Jugendfreundes verwahrte, ist es höchst unwahrscheinlich, daß gerade dieses einzige Stück daraus verloren gegangen sein sollte. Ein weiterer Grund, auf die *Theoria Parallelarum* sogleich das *Supplementum* folgen zu lassen, hatte für mich darin bestanden, daß Wolfgang in dem Briefe vom 18. Dezember 1807 (S. 85) schreibt, „obwohl Du mir nicht direkt auf das

geantwortet hast, wo ich einen sonderbaren Anstoß fand“ und nun das *Axiom des Intervalles* folgen läßt, auf das er, freilich ohne das Axiom ausdrücklich auszusprechen, den Beweisversuch im *Supplementum* gründet. Jedoch findet sich in der *Theoria Parallelarum* selbst eine Stelle, auf die sich der „sonderbare Anstoß“ beziehen läßt, denn dort heißt es (Zweiter Teil dieses Buches S. 9, 3. Absatz): „Mithin wird $\mathfrak{X}$ niemals in das Innere von Π gelangen können; denn es ist unmöglich, daß der Zwischenraum verschwindet, weil eine Größe nicht verschwinden kann, die, wenn sie auch einmal abnehmen sollte, doch immer, bevor sie erschöpft wird, zu derselben Konstanten oder einer noch beträchtlicheren Größe wieder hergestellt wird.“

S. 47, Z. 11—13. Hessling, *Versuch einer Theorie der Parallelen*. Halle a. S., 1818, S. XXX, erzählt, Pfaff habe gemeint, das einzige, was sich noch tun ließe, sei, das Parallelenaxiom durch ein einfacheres zu ersetzen, es zu „simplifizieren“; vgl. Stäckel und Engel, Th. d. P., S. 215 und die Anmerkung zu S. 32, Z. 12—15. Diese Äußerung Pfaffs ist insofern von Bedeutung, als der zweite Aufenthalt Gaussens in Helmstedt (Dezember 1799 bis Ostern 1800, wo er als Hausgenosse von Pfaff viel mit diesem verkehrte) unmittelbar auf die Zeit folgt, wo Gauss sich eifrig mit den Gründen der Geometrie beschäftigte; auch ist sein Brief an Wolfgang vom 16. Dezember 1799 (vgl. S. 42 dieses Teiles) in Helmstedt geschrieben.

S. 47, Z. 18—21. Man vergleiche hierzu auch Wolfgangs Äußerungen in dem Brief an Johann vom 4. April 1820, S. 78—79 des Textes.

S. 47, Z. 20—14 v. u. Über die Axiome der Ähnlichkeit vgl. Stäckel und Engel, Th. d. P., S. 19; dort findet man auch S. 21—30, den Beweis der fünften Forderung Euklids von Wallis (1663) in deutscher Übersetzung.

S. 47, Z. 10—6 v. u. Lobatschefskij, *Neue Anfangsgründe* (1835), siehe Engel, S. 76.

S. 48, Z. 5—7. Vgl. den Brief Wolfgangs an Johann vom 4. April 1820, S. 77, Absatz 3 dieses Teiles. Am Schlusse des Briefes, also hinter der Stelle S. 79, Zeile 5, hat Wolfgang die in Aussicht gestellte ausführlichere Mitteilung über sein Axiom gegeben, die hier folgen möge.

„Du hast hier das nichts werte Axiom, das ich für Kinder erdacht habe. Davon kommt es *per se* leicht heraus. Auf dein Verlangen schreibe ich es ab, weil es auch sonst wenig Raum einnimmt. Es handelt sich um die *eadem internorum summa aliter partita*. Ich schreibe es aus meinem Werke [ab]“.

„Nota bene: unter einem jeden Winkel soll verstanden werden: derjenige Teil des *planum infinitum*, der zwischen den in *infinitum* erstreckten Schenkeln des Winkels liegt. Die Schenkel sollen ebenso genommen werden“.

„*Si v non capiat angulum y, nec $v + x$ capit angulum $y + x$.* Dieses angenommen, ist das übrige leicht. Man sieht hier [Fig. 20a], daß der linke Schenkel [des Winkels x] von y so viel Neigung hat, wie der linke Schenkel [des Winkels x] vom v sich abneigt. Aber alles dieses ist Nichts *per se*“

„Wenn ich dies zeigen könnte: wenn auch der linke Schenkel von y sich n-mal so viel drehen würde um seine *vertex* nach BA als der linke Schenkel von v um A vom AB aufwärts, wo n eine beliebig große, nur bestimmte Zahl sein kann, so hätte ich meinen Prozeß gewonnen. Aber dieses alles ist unmöglich.“

„Aus dem obigen «Nichts» folgt die leichte *demonstratio*."

„I. *Si α non capit angulum α* [Fig. 20b], *tum BH secat AC.* Nam tum α habet aliquod punctum non in α cadens, hoc aut in BH ultra H cadit, et

Fig. 19a.

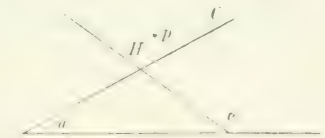


Fig. 20b.

tum patet), aut supra AC in p, et tum pB transit per AC, adeoque et BH (inter AB et pB situm) transit per AC."

„II. *Si ad quantumvis rectam AB* [Fig. 21] *ponantur interni u et v: AF et BG concurrent, si $u + v < 2R$.* — Nam ponatur ad verticem B [Fig. 22] angulus v penes u; quod remanet, dicatur y; e quovis puncto cruris dextri anguli $(u + v)$ ducatur recta AC, et ad verticem A deponatur ad sinistram angulus v penes z. Tum z non capit angulum y, quia per constructionem duo crura se mutuo secant; adeoque q extra z cadit; itaque (per Axioma dictum) nec $(z + v)$ capit angulum $(y + v)$, itaque AH et BH se mutuo secant.

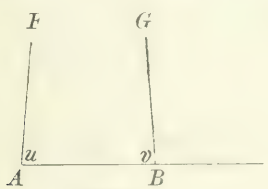


Fig. 21.

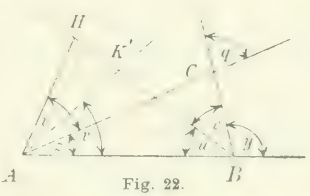


Fig. 22.

Quoniam autem $(z + v) > v$, sit $KAB = v$, tum K' erit commune cruribus angulorum v et u ad extrema rectae AB positorum; adeoque crura illa se mutuo secant."

S. 48, Z. 4—3 v. u. L. Bertrand, *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques*, Genf 1778, T. II, S. 19flg; die betreffenden Ausführungen sind abgedruckt bei Engel, S. 451—453. — A. M. Legendre, *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles*, Mémoires de l'académie des sciences, T. 12, Paris 1833, S. 397—399. Für die weitere Literatur vgl. Stäckel *und* Engel *Th. d. P.*, S. 231. Dazu kommt noch E. Knorr, *Versuch einer Darstellung der Elemente der Geometrie*, Kiew 1849, S. 33, über den Engel, S. 440—441 berichtet hat. Endlich sei noch angeführt G. Hessenberg, *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Göttingen 1906, Kap I, § 1: Das Paradoxon der Winkelvergleichung.

S. 48, Z. 3 v. u. — S. 49, Z. 19. Lobatscheuskij, *Neue Anfangsgründe*; siehe Engel, S. 71—76.

S. 49, Z. 5 v. u. — S. 50, Z. 3. Vgl. P. Stäckel, *Friedrich Ludwig Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*, Mathematische Annalen, Bd. 54 (1901), S. 49; in dieser Abhandlung wird auch eine deutsche Übersetzung von Wachters seltener Schrift: *Demonstratio axiomatis in Euclideis undecimi*, Danzig 1817, mitgeteilt.

S. 50, Z. 17—14 v. u. J. Frischauf, *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai.* Leipzig 1872, S. 91. Der Ausnahmefall, daß die drei Punkte in einer geraden Linie liegen, kann beseitigt werden, wenn man dem Axiom die Form gibt: *Sind irgend welche drei Punkte im Raume gegeben, so ist es stets möglich, durch zwei (geeignet zu wählende) dieser Punkte eine Kugel zu legen, innerhalb deren der dritte Punkt liegt* (Mitteilung von J. Kürschák).

Zum VII. Kapitel

S. 51, Z. 11—18. Aus der Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856).

S. 51, Z. 18—34. *Br. G.-B.*, S. 86.

S. 52, Z. 2—8. *Br. G.-B.*, S. 49, 86.

S. 52, Z. 9—10. Aus der Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856): „und liebte besonders, nebst feurigem Lernen, wenn ich mich darüber machte, .. namentlich affengeschicktes Klettern, besonders nach Vogelnestern, Ball-, Verstecken-Spielen, dann Ziegelstücke nach geometrischen Figuren schleifen; später Damen[brett]-, Schach-, Violin- und in einer Periode Kartenspiel".

S. 52, Z. 18—25. Aus der Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856). Die genannten Werke sind genauer:

L. Euler, *Vollständige Anleitung zur Algebra*, 2 Bde, St. Petersburg 1770; Johann hat den ganzen ersten Band und den ersten Abschnitt des zweiten Bandes durchgearbeitet, es fehlte nur der zweite Abschnitt des zweiten Bandes, der von der „unbestimmten Analytic" handelt.

Georg Freiherr v. Vega, *Vorlesungen über Mathematik* zum Gebrauch des k. k. Artilleriecorps, 4 Bde, Wien 1786—1802, vielfach aufgelegt; vgl. die Anmerkung zu S. 5, Z. 1 v. u.

R. S. Döttler, Professor an der Universität Wien, *Elementa physicae mathematico-experimentalis*, Viennae 1812.

S. 52, Z. 9 v. u. — S. 53, Z. 6. *Br. G.-B.*, S. 99.

S. 53, Z. 16—24. Szily, S. 33.

S. 53, Z. 9—7 v. u. Die lateinische Prüfungsarbeit, die sich im Besitz des Herrn P. Szabó (Budapest) befindet, lautet folgendermaßen.

„Ineuntis aetas adolescentiae imprimis notatu digna. Tum si viam ingressus sis rectam, longe profecto in virtutis curriculo progredieris, licet vita brevis sit. Sin autem a via recta aberraris, et aliquamdiu procul vagatus sis scopo, mox cum erroris conscius fueris, viam rectam non nisi quaesivisse magna constabit industriâ, atque nec summo studio multa assequi potueris. Magnis fortunae adfectus muneribus adulescentulus afui, qui providi dei gratiâ parentibus educatoribusque usus viam rectam ei jam initio ostendentibus, multo tamen majoribus, horum praeceptis observantiam tribuens et recta titubasse cavens viâ. Themistoclem minime tam fortunatum fuisse a Nepote traditum, quippe qui peradulescentulus et liberius vixit, et magis sui judicii fuit, atque a patre probatus fuisset: contra ea mature ad sanitatem rediisse videtur, vitiaque magnis emendasse virtutibus; tantusque post vir evasit, ut aetate primus sua omnium respectu prudentiae Graiûm poneretur. Quantus fieri vir talis potuisset; nusquam si a via recta deerrasset: tum forte amore studioque justitiae aequitatisque laudis Aristidis sive Epaminondae compos fuisset. Praecipue itaque conandum: a virtute nec minimum aberrare."

S. 54, Z. 17—14 v. u. *Br. G.-B.*, S. 86—87.

S. 55, Z. 10—12. Als Graf Samuel Teleki im Jahre 1822 starb, ersparten seine Kinder durch Vereinfachung des sonst üblichen Pompes beim Begräbnis ihres Vaters 2000 Gulden, die sie Wolfgang zukommen ließen. Nach dem Tode des Barons Simon Kemény (1826) übersandte dessen Frau Wolfgang sechs Schuldbriefe, „auf den Wunsch des verstorbenen lieben Simon, und wenn ich deren noch mehr finden sollte, schicke ich auch diese zurück." Auch bei der Herausgabe des *Testamens* haben die Familien Teleki und Kemény wesentlich mitgeholfen.

S. 55, Z. 14—16. Schlesinger, *Neue Beiträge*, S. 261.

S. 55, Z. 16 v. u. — S. 56, Z. 2. *Br. G.-B.*, S. 99—100.

S. 56, Z. 6—17. Bedőházi, S. 192. Die Kinder von Gauss waren: Aus erster Ehe mit Johanne Osthof (gestorben den 11. Oktober 1809) *Joseph* geb. den 21. Aug. 1806, *Minna*, geb. 29. Febr. 1808; aus zweiter Ehe mit Minna Waldeck *Eugen*. geb. 29. Juli 1811, *Karl Wilhelm*. geb. 23. Okt. 1813, *Therese*, geb. 19. Juni 1816.

S. 56, Z. 20—23. Schlesinger, *Festrede*, S. 169.

S. 56, Z. 17 v. u. — S. 57, Z. 9. Aus der Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856).

S. 57, Z. 16—8 v. u. Aus der Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856).

S. 58, Z. 9. Matthias Freiherr v. Hauser (1741—1816), *Analytische Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik* in drei Teilen, Wien 1778—1786, 2. Aufl. 1816—1823. Hauser war 1774 bis 1804 Lehrer der Mathematik an der k. k. Ingenieur-Akademie zu Wien.

S. 58, Z. 10 — S. 59, Z. 2. Szily, S. 33.

S. 59, Z. 20 v. u. — S. 60, Z. 20. Schlesinger, *Neue Beiträge*, S. 263, 266, 265—267. Das S. 60, Z. 18 erwähnte Jugendbild von Johann hat dieser selbst, wie mir Koncz erzählte, bei einer der Streitigkeiten mit seinem Vater in einem Wutanfall zerstört. Ein Miniaturbild Johanns auf Porzellan befand sich im Besitz seines Sohnes Dionys, es ist jedoch durch dessen Kinder, die damit spielten, unkenntlich gemacht worden. So kommt es, daß kein Bildnis von Johann Bolyai aufzufinden ist.

Zum VIII. Kapitel

Als Quellen für dieses Kapitel haben hauptsächlich gedient die *Geschichte der k. und k. Technischen Militärakademie* von Friedrich Gatti, Wien 1901, besonders der erste Band: *Geschichte der k. k. Ingenieur- und k. k. Genie-Akademie 1717—1869*, und die Abhandlung von P. Szabó, Bolyai *János ifjusága* (Johan Bolyais Jugend), Mathematikai és physikai Lapok, Bd. 19 (1910), S. 135—164.

S. 63, Z. 17—22. Johann, Erzherzog von Österreich, geboren den 20. Jan. 1782 zu Florenz, gestorben den 11. Mai 1859 zu Graz, ist durch seine Teilnahme an den Kriegen Österreichs gegen Napoleon (1800—1810) bekannt. Durch Beschluß der Frankfurter Reichsversammlung vom 27. Juni 1848 wurde er zum Reichsverweser ernannt, trat aber schon am 20. Dezember 1849 ins Privatleben zurück.

S. 65, Z. 14—32. Szily, S. 33—34.

S. 65, Z. 8 v. u. — S. 66, Z. 3 und Z. 12—24. Schlesinger, Neue Beiträge, S. 264 und 265.

S. 67, Z. 11—13. M. Lencker, *Anleitung zur mathematischen Erdbeschreibung, zur Zeichnung von Land- und Seekarten.* Wien 1818.

S. 67, Z. 2—1 v. u. Schlesinger, *Neue Beiträge*, S. 262.

S. 68, 1. Z. v. u. „Tyrannischer Gedanke" vgl. Wolfgangs Brief an Johann vom 4. April 1820, S. 82, Z. 9 v. u.

Zum IX. Kapitel

S. 69, Z. 8 v. u. — S. 70, Z. 2. Schlesinger, *Neue Beiträge*, S. 268—269.

S. 69, Z. 5 v. u. In der Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856) berichtet Johann: „. . . später Damen[brett]-, Schach-, Violin- und in einer Periode Kartenspiel; nie Tabak geraucht, nie Weintrinker, Kaffee — Frühstück ausgenommen — selten."

S. 70, Z. 11—12. Gregor (Gergely) besuchte zunächst das ev.-ref. Kollegium zu Maros-Vásárhely. Später übernahm er das Familiengut zu Bolya, das durch den Tod seines Onkels Anton (1845) an Wolfgang gefallen war. Dort ist er 26. August 1890 gestorben. Gregors einziger Nachkomme, sein Sohn Kaspar, lebt in Székelyndvarhely.

S. 70, Z. 15—19. Die endgiltige Auseinandersetzung über das mütterliche Erbe Johanns hat erst am 1. April 1828 stattgefunden.

S. 70, Z. 20—22. Schlesinger, *Neue Beiträge*, S. 269.

S. 70, Z. 19—10 v. u. Franz Schmidt, *Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker*. Archiv der Math. u. Physik, Bd. 48 (1868), S. 220; über Schmidt vgl. auch S. 199—202 des Textes und die zugehörigen Anmerkungen.

S. 71, Z. 14, 16—18. Aus dem Vorwort zur *Raumlehre* (um 1834).

S. 71, Z. 22. *Tentamen*, Ed. sec. T. II, S. 416.

S. 71, Z. 16—7 v. u. Aus dem Vorwort zur *Raumlehre* (um 1834). In der Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856) hat Johann einen ähnlichen Bericht gegeben: „. . . worauf ich ihm sagte, daß er meine Arbeit verdamme, ohne sie zu verstehen, und [er] sagte, er brauche mich samt derselben nicht. Worauf ich ihm sagte, über den Wert können wir auf diese Art nicht entscheiden; allein ich will einen nennen, den ich als kompetenten Richter anerkenne, und wage es zu versprechen, mich an dessen Ausspruch darüber unbedingt zu halten (weil ich Gauss's Geist kennend schon im voraus gewiß war, er könne darüber unmöglich ein nachteiliges Urteil fällen). Dieser Mann ist Gauss. Er [der Vater] schickte nun . . ."

S. 72, Z. 4. Zwischen *absoluter* und *nichteuklidischer* Geometrie wird nicht immer scharf unterschieden. Hier soll (im Sinne von Johann Bolyai) unter absoluter Geometrie das System der Geometrie verstanden werden, das von der Wahrheit oder Falschheit des Parallelenaxioms unabhängig ist, sodaß also die euklidische Geometrie (Σ bei Johann) als besonderer Fall unter der absoluten Geometrie enthalten ist. Dagegen wird als nichteuklidisch ein System der Geometrie bezeichnet werden, das sich bei der Annahme der Falschheit des Euklidischen Parallelenaxioms ergibt, sodaß (im Sinne von Johann Bolyai, vgl. z. B. S. 257, Z. 3 v. u.) hierbei der Wert $i = \infty$ ausgeschlossen ist. Vgl. auch den hiermit übereinstimmenden Gebrauch des Wortes nichteuklidisch bei Engel, S. 160 dieses Teiles.

S. 72, Z. 3—13. Gauss Werke, Bd. VIII (1900), S. 220.

S. 72, Z. 18—14 v. u. Das *Tentamen* und somit auch der *Appendix* war zum Beispiel nach Wien an die dortigen Professoren Littrow und Ettingshausen gesandt worden. Von Littrow sagt Johann in der *Allheitlehre*, er habe den *Appendix* nicht begreifen und würdigen können, indem so etwas sein leicht fertiges Fassungsvermögen überstieg, und über Ettingshausen äußert er sich in einem Brief an seinen Vater vom 20. Januar 1855: „Ettingshausen schätze ich auch als vielverdienten und distinguierten Mann, obgleich er wohl recht unglücklich, blind und befangen genug ist, um uns nicht würdigen zu können." Vgl. auch die Anmerkung zu S. 32, Z. 12—15, letzter Absatz.

S. 72, Z. 11—4 v. u. Schlesinger, *Festrede*, S. 182.

S. 73, Z. 1. Ein Entwurf dieser Bittschrift, datiert Lemberg, den 3. Mai 1832, befindet sich im Besitz von Herrn P. Szabó (Budapest). Dieser hat mir eine Abschrift des wichtigen Schriftstücks zur Verfügung gestellt, die ich hier abdrucke. Die in geschweifte Klammern { } eingeschlossenen Worte sind von Johann selbst eingeklammert worden; sie sollten wohl in der Eingabe selbst gestrichen werden.

„Euere Kaiserliche Hoheit!"

„Durchlauchtigster Erzherzog, Gnädigster Herr, Herr!"

„Der in tiefester Untertänigkeit Gefertigte hat früher, in dienstfreien Stunden, Untersuchungen über verschiedene, ebenso wichtige, als bisher gar nicht oder doch nicht gehörig bearbeitete Gegenstände aus dem Gebiete der Mathematik — er glaubt es — mit Erfolg angestellt. Selbe wünscht er nun sehnlichst vollends auszuarbeiten, und, in der seit jeher heiß gehegten Absicht, gute Sachen allgemein nützig zu machen, dem Drucke zu überliefern, und somit vor Untergang zu sichern."

„So schwierige Gegenstände können jedoch, besonders bei einem so schwächlichen Gesundheitszustande, als sich Gefertigter schon seit längerer Zeit befindet*), nur durch ungeteilte Verwendung der Geisteskräfte hervorgebracht werden."

„In der vollkommensten Überzeugung, daß die gute Sache stets Euerer K. H. höchster Berücksichtigung sich erfreuen darf, wagt er demnach in tiefster Ehrfurcht, Höchstdemselben die allergehorsamste Bitte vorzutragen: ihn Behufs des oben angeführten auf drei Jahre von den eigentlichen kurrenten Dienstgeschäften gnädigst entfernen und nach Hermannstadt in die heimatliche Luft [zu] befehligen zu geruhen und zugleich [zu] genehmigen, in Maros-Vásárhely bei seinem Vater mit einem dreimonatlichen Urlaube verbleiben zu dürfen, um dort jene persönliche Erholung, jene geistige Ruhe und Muße zu erhalten, wodurch allein er seinen obausgesprochenen Zweck zu erreichen {und der Menschheit den möglichst großen Dienst zu leisten} imstande ist {worein er so sehr sein höchstes Glück setzt, daß er seinen eigenen Wert einzig nach der Fähigkeit bemißt und sich selbst stets nur in dem Maße schätzt, als er zu seiner eigenen Veredelung und somit zur Ausbildung des ganzen [Menschen-]Geschlechts beizutragen Kraft in sich fühlt}".

*) Verbesserung: „. . . als Gefertigter [bei seinem] durch anhaltende, in Lemberg überstandene nerveuse Übel sehr geschwächten Zustande das Schlimmste für seine Gesundheit besorgen muß."

„Wobei jedoch für den Fall eines plötzlich ausbrechenden Krieges die höchste Gnade er sich untertänigst erbäte, sogleich auch dazu kommandiert zu werden."

„Zur höchsten Würdigung fügt er folgende Bemerkungen bei."

„1. *Bürgt* beiliegende kleine Schrift dafür, daß seine Bemühungen auch selbst bei *ganz außerordentlichen* und bisher *allgemein* für *unüberwindbar gehaltenen Schwierigkeiten* nicht immer fruchtlos bleiben. Wie Herr Hofrat Ritter von Gauss — allbekanntlich einer der kolossalsten Geister *aller Zeiten*, der größte jetzt lebende Mathematiker, zugleich aber auch ein eben so strenger als einsichtsvoller und mit Belobungen äußerst sparsamer Rezensent — sich über dieselbe Schrift äußert, möge hochgnädigst aus beiliegendem Auszuge seines an den Vater des untertänigst Gefertigten gerichteten Schreibens entnommen werden."

„Euerer K. H. allgerühmten und -verehrten, tiefschnell eindringendem Blicke würde zwar der *wahre* Eindruck, den erwähntes Werkchen auf diesen großen Mann machte, auch ohne weitere Bemerkungen darüber nicht entgehen. Jedoch glaubt der ehrfurchtsvoll Gefertigte — ohne die den ganz vorzüglichst ausgezeichneten, glänzenden Verdiensten dieses genialen Geistes gebührende hohe Achtung verletzen zu wollen — *jenem Aufsatze sowohl als sich selbst* schuldig zu sein, von den zahlreichen Bemerkungen, die sich auf erwähnten Brief machen [ließen], wenigstens Folgende nicht zu unterdrücken. Gauss äußert nämlich (mit anderen Worten): *nur wenige Menschen besitzen einen Sinn zur Auffassung des Wesens des darin behandelten Gegenstandes, und es können nur jene ein höheres Interesse dafür haben, die sowohl hinsichtlich dessen, worum es sich dabei handelt, und somit über die äußerste Wichtigkeit der Sache, im Klaren sind, als die mit Lösung dieses gordischen Knotens verbundenen Hindernisse an gescheiterten eigenen Versuchen lebhaft gefühlt haben.* Und dies alles ist nur allzuwahr, jedoch dem diesfälligen Gegenstande keineswegs ausschließlich eigen: es erstreckt sich mehr oder weniger wieder auf alles *Feinere, Edlere, Höhere.*"

„Und offenbar kann, *ohne sich ganz bloßzugeben*, und dem Charakter nach als schwach anzukünden, [das Vorhergehende] nie als ein Grund angeführt werden, seine eigenen *bewährten Arbeiten* über derlei sonst noch dunkle Gegenstände zu unterdrücken."

„Worum anders handelt sich es denn sonst in Wissenschaften, als beständig eben darum, *unklare Dinge aufzuklären, fehlende her[bei]zuschaffen?* — Wäre Gauss hiervon nicht ebenso überzeugt und durchdrungen, als Gefertigter, und bei Beantwortung dieser Frage zweifelhafter, so hätte er aus ähnlichem Grunde wohl noch mehrere seiner sonstigen vortrefflichen Arbeiten untergraben müssen. Äußerte er doch selbst von einem seiner Werke *(Disquisitiones arithmeticae)*, daß selbes damals nur 6 Mathematiker in ganz Europa verstanden hätten."*)

„Da also Gauss, den löblich scheinenden Grund, *daß er sonst sich selbst mitloben müßte*, vorschützend, ein *offenes* Urteil über den reellen Wert der Sache zu fällen, auszuweichen bemühet ist {ohne daß er übrigens etwas auszustellen fände}, so sieht sich der untertänigst Gefertigte verpflichtet, jenes Produkt, so wie jedes Andere, *selbst* für das auszugeben, was es ist, und über

*) Brief an Wolfgang Bolyai vom 2. Sept. 1808, *Br. G.-B.*, S. 93.

die Tendenz und den Wert desselben, mit höchstgnädiger Erlaubnis, freimütig seine Meinung auszusprechen — und findet dieses nun hier um so nötiger, als er teils der möglichsten Kürze wegen, teils aus — wie er nun *deutlich* sieht — übertriebener, und, insofern dadurch die Ausbreitung der guten Sache gehindert wird, auch schädlicher Bescheidenheit, selbst kein Vorwort dazu schrieb, gleich bemühet, die Sache geradezu darzustellen, als fühlend, daß sich nicht wohl eine treffende Bemerkung darüber machen lasse, ohne schon ein nicht kleines eigenes Lob zu enthalten, und überzeugt, daß vor des *Kenners* Blick die einfache prunklose Darstellung selbst den besten Eingang finde und ihre Wirkung ohnedies nicht verfehle. Dabei läßt er jedoch allen Akademien, Universitäten, gelehrten Gesellschaften und überhaupt den *geeigneten* Richtern sehr gern das eigene Urteil."

„Des Verfassers Schuld könnte es offenbar nie sein, *wenn allen Falles ein Urteil bloß deshalb schief und geringschätzend ausfiele, weil betreffender Rezensent nicht gehörig Meister der Sache geworden ist.*"

„Es ist denn in derselben Schrift ein Gegenstand, woran seit der bekannten Kultivierung der Geometrie durch die Griechen — welche ihren ganz eigenen Scharfsinn auch in dieser Wissenschaft so rühmlich bewiesen haben — also seit 2100 Jahren die rastlosesten Bemühungen der ausgezeichnetsten und scharfsinnigsten Köpfe — wie man mit *vollem* Rechte sagen kann, *gänzlich* scheiterten, — *auf das vollkommenste ergründet, durchdrungen und ins Klare gebracht*, obwohl selbe absichtlich bloß die *Quintessenz* des Wesens der Sache enthält und bei dieser Gelegenheit dasselbe nur in gedrängtester Kürze darbietet, wo freilich nur des Kenners Auge durchdringt."

„Es ist wohl die wesentlichste, wichtigste, interessanteste und auch genug verwickelte Aufgabe der Raumlehre und eigentlich eine *aus dem Grunde und durchaus neue bisher von allen Geometern nicht einmal* dem Begriffe nach geahnte Wissenschaft."

„Ihren Inhalt deutet kürzlich der Titel selbst an. Bisher ging man stets darauf aus, Euklids XI. Axiom zu *rechtfertigen*; aus benannter Schrift wird die *absolute Unmöglichkeit*, je zu einer diesfälligen Erkenntnis zu gelangen, bewiesen, und dafür eine ganz andere, derselben gar nicht bedürfende und zugleich für alle Fälle vollkommen *zureichende* Raumlehre aufgestellt. Ohne diese stürzt die ganze bekannte Geometrie zusammen, oder selbe ist doch auf eine lediglich prekäre Hypothese gegründet."

„Was hinsichtlich des XI. Axioms geleistet war, enthält unter anderen das eigens dazu geschriebene Buch: *Critik der Parallelentheorie von* Joh. Jos. Ign. Hoffmann, Jena 1807. — Dieses Werk, obgleich an sich noch sehr schwach — und dabei selbst die Kritik oft fehlerhaft, und wieder einer Kritik bedürfend — *dient doch als einige Vorbereitung für denjenigen, der die mehrerwähnte Schrift durchzugehen gesonnen, mit dem Wesen der Sache aber allenfalls noch nicht vertraut ist, was allerdings manchmal auch bei ausgezeichneten Mathematikern der Fall ist, die sich jedoch dann niemals zur Klasse der Geometer vom ersten Range bekennen dürfen.* Sehr zuträglich wäre auch eine Bekanntschaft des Lesers mit Euklid, dem bis itzt unübertroffenen oder richtiger *unerreichten* Muster eines recht geometrischen und systematischen Vortrages. — Übrigens muß der Leser in dem ganzen Gebiete der reinen Mathematik bewandert sein. — Der berühmte Kästner zerbrach [sich] neun Jahre hindurch den Kopf darüber und war in der Tat noch nicht bei dem § 1 mehrerwähnter

Schrift, so wie das Resultat des ganzen vorzitierten und zur vorläufigen Lesung und Orientierung als unerläßlich empfohlenen Werkes nicht so weit reicht. Der einzige Gauss scheint einige wenige leichtere Schritte gegen das Ziel, welches selbst zu sehen er aber noch viel zu weit entfernt war, getan zu haben. Nicht konnte [er] jedoch, ungeachtet aller Anstrengung, *vordringen*; dieses kann der Verfasser aus mehreren Daten, welche teils der jetzige, teils frühere Briefe von Gauss, dann eine Menge Briefe vom Vater [an den Verfasser] enthalten, außer Zweifel setzen. Der Verfasser überwand sämtliche Hauptschwierigkeiten dabei bereits in der zweiten Hälfte des Jahres 1823; nachdem schon früher, als er noch Zögling der k. k. Ingenieurs-Akademie zu sein das Glück hatte, ein so lebhaftes Interesse in ihm erwachte, überhaupt für alles echte Wissen, und insbesondere für einen selbst geschichtlich schon — abgesehen von innerer Wichtigkeit und Vortrefflichkeit — so äußerst merkwürdigen Gegenstand, daß er, nachdem einige leichtere Versuche noch weit weg vom Ziele blieben, nicht die Mühe eines kräftigen Angriffes scheute, um diese große und so unbefriedigende Lücke, wo es nur in seinen Kräften steht, doch auszufüllen. Und tief fühlt er, daß Ruhe und Glück nicht eher für ihn zu finden wären, als er sich aus diesen Labyrinthen herausgewunden haben wird."

„Mit gleichem Erfolge wurden noch sehr viele andere wichtige Gegenstände bearbeitet, und so zu sagen eine gänzliche Reformation der bisher (in Übereinstimmung mit dem Ausspruche der ersten Geister) sehr elend behandelten Mathematik vorgenommen. Von der Last aller dieser Früchte seines Nachdenkens sehnt sich nun der Verfasser durch eine vollkommene Ausarbeitung und öffentliche Bekanntmachung befreit zu werden."

Lemberg, am 3. May 1832. Johann v. Bolyai
Capit. im Génie-Corps.

Der Eingabe selbst, die Johann am 8. August 1832 abgesandt hat, war beigelegt erstens eine deutsche Fassung der ersten 33 Paragraphen des *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, die im zweiten Teile dieses Werkes, S. 185—203 zum ersten Male abgedruckt wird, und zweitens ein Auszug aus dem Briefe Gaussens an Wolfgang Bolyai vom 6. März 1832, den man S. 92—94 dieses Buches findet; Wolfgang hatte davon bald nach dem Empfang des Briefes eine Abschrift anfertigen lassen und diese seinem Sohne nach Lemberg geschickt, der sie am 6. April 1832 erhalten hat (vgl. S. 95). Dem Briefe hat Johann Fußnoten hinzugefügt. Einige davon verdienen hier mitgeteilt zu werden.

Zu S. 93, Z. 14. „Auf den ersten Anblick oder oberflächlich betrachtet wohl (so ist auch der Verfasser vor bereits 13 Jahren [1819] darauf gekommen), allein bei strengerer Prüfung findet man den Ausdruck Kreislinie von unendlichem Radius *unrichtig* und unpassend, wie auch Gauss ohne allen Zweifel bei näherer Untersuchung zugeben wird."

Zu S. 93, Z. 17. „Diese Namen sind allerdings sehr treffend und vortrefflich, beinahe ähnliche Namen findet man jedoch auch in des Verfassers ältesten Schriften, und die Zeichen wurden erst später der Kürze wegen eingeführt."

Auf einem Zettel, der aus der Zeit um 1834 zu stammen scheint, hat Johann vermerkt:

„Parasphäre – Paracykel. Diese Benennungen hat zwar, nach geschehener Mitteilung gegenwärtiger Theorie, auch Gauss vorgeschlagen; es konnte jedoch nicht fehlen, daß gleich bei der ersten Entstehung dieser Lehre sich [mir]

nicht analoge Ideen aufgedrungen hätten: ich nannte damals den Paracykel $\bigcirc\!\!\infty$ und [den Hypercykel $\bigcirc$] hyper $\curvearrowright$, obschon letzteres fehlerhaft ist. Und wirklich bediente ich mich schon in meinen ältesten Schriften ganz analoger Namen, Analogie mit Parabel bemerkt, indem in der Tat $\backsim$-Relation usw."

Zu S. 93, Z. 24. „Hier hat Gauss auf eine etwas kürzere, jedoch gewiß *weniger rein geometrische* und zwar (wie von *Ihm* allzeit zu erwarten) sinnreiche, aber nicht elegantere Art *das* bewiesen, was § 42 bloß mittels der §§ 39 bis 41 dargetan ist.*) Übrigens fügt der Gefertigte einen noch weit kürzeren Beweis des Satzes des § 42 bei. Sei nämlich [Fig. 23] ab ef, ac fe || gl, lg ad, alles in *einer* Ebene, ferner bf = ba und fm bb: so ist offenbar dabg ≡ mfbb oder $\alpha = \alpha'$. Hier ist nun nach der Bezeichnung von Gauss

$$f(u+v) = \beta + \gamma + \alpha', \quad fu = \beta + \alpha, \quad fv = \gamma,$$

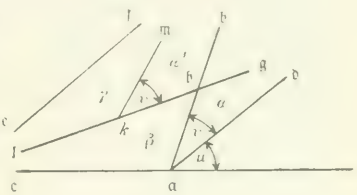


Fig. 23.

mithin

$$f(u+v) = fu + fv,$$

woraus sogleich der zu beweisende Satz nach VII folgt. — Übrigens ist dieser ganze Satz noch eine *unbedeutende Kleinigkeit* in der Sache, in *dem § 43 konzentriert sich alles Vorhergehende*, so daß zur *geometrischen Quadratur des Kreises* es allerdings nötig war, sämtliche und ganz *andere* Schwierigkeiten zu übersteigen."

Es ist ein merkwürdiges Zusammentreffen, daß auch Gauss in einem Handbuche, hinter einer Notiz, die die Hauptmomente des in dem Briefe an Wolfgang mitgeteilten Beweises enthält und wahrscheinlich aus derselben Zeit wie dieser Brief stammt, eine Abänderung des Beweises angegeben hat, die auf einem ähnlichen Gedanken wie das Verfahren von Johann beruht; siehe Gauss Werke, Bd. VIII, S. 227.

Zu S. 93, Z. 7 v. u. „Sowohl hat sich Gefertigter mit dieser Aufgabe schon früher beschäftigt gehabt, als diese Schlüsse von Gauss bestätiget gefunden. Jedoch steht ihm noch ein kräftiger Versuch bevor." Vgl. S. 109—118.

Zu S. 94, Z. 3. „Alles dieses hat Gefertigter schon lange als nur zu richtig anerkannt, und ersann auch wirklich eine in ihrer Art so vollkommene Theorie der *Geraden* und der *Ebene* als des *Raumes*." Vgl. Kapitel XVII.

Zum X. Kapitel

Als Quelle für dieses Kapitel diente hauptsächlich die Abhandlung von P. Stäckel, *Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai*, auf Grund nachgelassener Aufzeichnungen Johanns dargestellt. Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Bd. 17, Jahrg. 1899 (1901). Im Besonderen sind in dieser Abhandlung zum ersten Male umfangreiche Bruchstücke aus dem Briefe Wolfgangs an Johann vom 4. April 1820 veröffentlicht worden, die sich auf einzelnen Zetteln in Johanns Nachlaß gefunden hatten. Später hat Herr P. Szabó (Budapest) den Brief selbst in dem Nachlaß seines im Jahre 1905 verstorbenen Vaters Samuel

*) Vgl. *Br. G.-B.*, S. 110—111.

Szabó aufgefunden, der 1858—1868 Professor am Kollegium zu Maros-Vásárhely gewesen war. Herr P. Szabó hat mir eine deutsche Übersetzung des Briefes zur Verfügung gestellt, mit deren Hilfe die in der angeführten Abhandlung gemachten Angaben ergänzt werden konnten.

S. 75, S. 8—4 v. u. Der Bericht Wolfgangs über sein Axiom ist abgedruckt in der Anmerkung zu S. 48, Z. 5—7.

S. 76, Z. 13—27. Aus dem Vorwort zur *Raumlehre* (um 1834). Auf einem Zettel aus der späteren Zeit (1848—1858) hat Johann folgende ausführlichere Darstellung gegeben. „Die Betrachtung einer beliebigen gleichförmigen Polygonallinie oder gebrochenen Geraden in einer Ebene veranlaßt durch die aus Voraussetzung eines überall gleichen Abstandes zweier Geraden hergenommenen Erklärung der parallelen Geraden war so wie bei meinem Vater bei mir der erste Weg oder Gedanke, wodurch ich das XI. Axiom oder $\measuredangle$ zu beweisen*), richtiger und sicherer darüber ins Reine zu kommen, versuchte, und wobei ich zu beweisen oder entscheiden trachtete oder strebte, daß jede derlei Linie entweder in sich selbst zurückkehrt oder doch knotig sei. Und zwar hatte ich hier im Auge, daß, so wie ein in einer Ebene um denselben Punkt wiederholt aneinander gesetzter, gleicher, ebener Winkel ein Mal die ganze Ebene erschöpft oder eine Gerade um einen ihrer Punkte gedreht jeden Punkt derselben erreicht, ja zurückläßt, so muß (?) auch verallgemeinert, wenn die Spitze des gleichen Winkels dabei längs beliebigen Geraden, unter gleichem Winkel mit diesen, *wie immer* in derselben Ebene bewegt wird, dasselbe erfolgen, nämlich durch die neuen Schenkel einmal jeder Punkt in der Ebene erreicht werden."

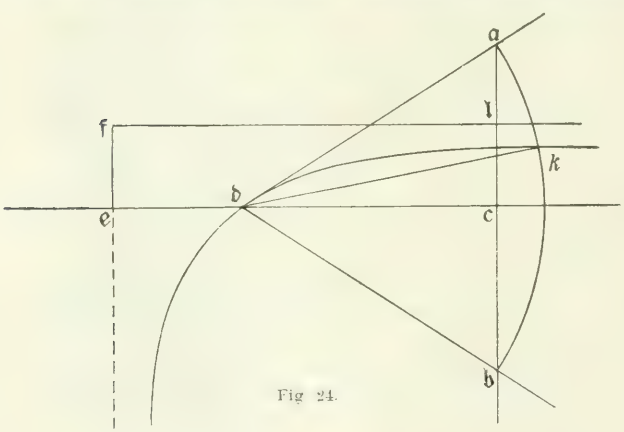


Fig. 24.

S. 76, Z. 11—10 v. u. Auch mit der Dreiteilung des Winkels hat sich Johann beschäftigt. Ein Zettel in seinem Nachlaß, der aus seiner Jugendzeit stammt, enthält die folgende strenge Lösung mittels einer gleichseitigen Hyperbel.

Die Dreiteilung des Winkels.

Halbiere den [in drei Teile zu teilenden] Winkel adb [Fig. 24] durch ec; mache $de = \frac{1}{2}dc$, die $\perp$-te $ef = \frac{1}{3}ca$, und ziehe $fl \parallel ec$; verzeichne nun zu den Asymptoten fl und fc durch den Punkt d eine Hyperbel; wo sie den Bogen ab schneidet, da wird [der Bogen] $af = \frac{1}{3}ab$.

S. 76, Z. 23, Für Saccheri und Lambert vgl. die betreffenden Abschnitte bei Stäckel und Engel, *Th. d. P.*; siehe auch die Anmerkung zu S. 43, Z. 18.

*) In den Aufzeichnungen aus der Spätzeit bedient sich Johann vieler solcher Zeichen, die erst enträtselt werden müssen; hierher gehört auch das Zeichen für das XI. Axiom.

S. 77, Z. 16—12 v. u. Wolfgang hat diese Absicht ausgeführt. Seine Darlegungen sind abgedruckt S. 224 in der Anmerkung zu S. 48, Z. 5—7.

S. 79, Z. 6 — S. 80, Z. 5. Aus dem Vorwort zur *Raumlehre* (um 1834).

S. 80, Z. 15—8 v. u. Daß in der euklidischen Geometrie die Ebene als Grenze der Kugel, die Gerade als Grenze des Kreises bei wachsendem Radius angesehen werden kann, ist gewiß schon den griechischen Geometern geläufig gewesen. Allein die Erkenntnis, daß umgekehrt die Annahme, die Grenzkugel sei eine Ebene oder der Grenzkreis sei eine Gerade, mit dem Parallelenaxiom gleichbedeutend sei, scheint jüngeren Ursprungs zu sein. Als Vorstufe läßt sich die Bemerkung ansehen, daß die ebene euklidische Trigonometrie aus der sphärischen hergeleitet werden kann, indem man den Radius der Kugel ins Unendliche wachsen läßt; der erste Autor, den ich hierfür auffinden konnte, ist L. Euler, *Principes de la trigonométrie sphérique*, Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin, 9 (1753), 1755, S. 223 (vgl. auch Eulers Abhandlung, *De mensura angulorum solidorum*. Acta acad. sc. Petrop. 1778, pars II, 1781, vorgelegt 1775). Dann kommt J. H. Lambert in seinen *Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik*, Bd. 1, Berlin 1765, S. 408. Ferner sind zu nennen: Johann Kies, *Trigonometria methodo plana et facili exposita*, Tübingen 1760 (vgl. M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. 4, 1908, S. 407), A. R. Mauduit, *Principes de l'astronomie sphérique*, Paris 1765 (vgl. A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, 2. Bd., 1903, S. 165), P. Ferroni, *Paralleli e principio unico e semplice delle due trigonometrie*, Memorie della Società Italiana (detta dei XL), 12 (1805), S. 106—183 (vgl. A. v. Braunmühl, a. a. O., S. 179). Bei Grashof, *Theses sphaerologiae quae ex sphaerae notione veram rectae lineae sistunt definitionem*, Berlin 1806 tritt der Gedanke in etwas verschwommener Form auf, in voller Klarheit aber findet er sich entwickelt bei F. L. Wachter, *Demonstratio axiomatis in Euclideis undecimi, Danzig 1817* und J. W. A. Lehmann, *Mathematische Abhandlungen*, Zerbst 1829, vgl. Stäckel, *F. A. Taurinus*. Abhandl. zur Geschichte der Mathematik, Heft IX, Leipzig 1899, S. 426, *F. L. Wachter*, Math. Annalen, 54 (1901), S. 57.

S. 80, Z. 9—35, Z. 2 v. u. — S. 81, Z. 2. Aus der Einleitung zur *Raumlehre* (1851).

S. 81, Z. 10. Wegen Karl Szász siehe S. 66 des Textes.

S. 81, Z. 12. Über Lobatschefskij siehe die Kap. XV und XVI dieses Teiles.

S. 81, Z. 19—16 v. u. Johann hat von März 1826 bis September 1830 in Arad gestanden (S. 70 des Textes). Mit der Ausarbeitung ist wohl die Darstellung gemeint, von der Johann dem Hauptmann Wolter v. Eckwehr Ende 1825 oder Anfang 1826 Mitteilung gemacht hat (S. 90—91 des Textes).

S. 82, Z. 6—8. Wann Szász in Göttingen bei Gauss gewesen ist, hat sich nicht genau feststellen lassen. Nach einem Bericht von Mentovich (S. 135 des Textes), der im August—September 1843 in Göttingen war, hatte Szász „einige Zeit" vor ihm Gauss besucht. Mentovich erzählt weiter, seine Nachrichten über Wolfgang Bolyai seien älter gewesen als die von Szász, weil er schon vor anderthalb Jahren Siebenbürgen verlassen hätte. Mithin muß der Besuch von Szász zwischen Februar 1842 und Sommer 1843 stattgefunden haben. Es möge noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß Wolfgang und Johann die Verdienste von Szász, der kein gewöhnlicher Mann war, wohl

zu schätzen wußten. In dem Bruchstück eines Briefes an Johann, der aus der Zeit kurz vor dem Druck des *Tentamens* stammt, also ungefähr ins Jahr 1830 zu setzen ist, sagt Wolfgang: „Um ein solches Werk nach seinem Werte schätzen zu können, bedarf es eines großen Verstandes; auch dies beweist (was ich längst erkannt habe) eben das außerordentliche, besondere Talent des Szász; ewig schade, daß ein solcher zum Leuchten geschaffener Blitz und scharfer Verstand unter den Pandekten verschimmelt." Johann aber beginnt in seinen *Bemerkungen über Nicolaus Lobatscheefskijs Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* vom Jahre 1851 (vgl. Kap. XV und XVI) den Bericht über den Anteil, den Szász an der Entdeckung der absoluten Geometrie gehabt hat, mit den Worten: „Ich halte es für nötig, das Folgende zu bemerken in bezug auf die Geschichte des Gegenstandes [der Entdeckung der absoluten Geometrie], woraus hervorgeht, inwieweit und welchen Anteil hat der unstreitig in vieler Hinsicht ausgezeichnete, vorzügliche und mächtigen Geistes seiende Karl Szász, um den es nur schade ist, daß er, gleich mir, seine große Kraft so vielseitig zerstreut." Vgl. auch S. 250—251.

S. 82, Z. 11—15. Aus dem Vorwort zur *Raumlehre* (um 1834).

S. 82, Z. 17—S. 83, Z. 4. Das genaue Datum dieses Briefes hat sich nicht feststellen lassen; die folgenden Angaben finden sich auf einzelnen Zetteln in Johanns Nachlaß.

S. 83, Z. 16 v. u. — S. 84, Z. 7. Aus dem Vorwort zur *Raumlehre* (um 1834). Auch dieser Brief Wolfgangs ist nicht erhalten.

S. 84, Z. 15—35. Aus dem Entwurf einer Einleitung zur *Raumlehre* vom Jahre 1851. Über den mißglückten Beweisversuch berichtet Johann: „Ich bewies denn allerdings streng, daß wenn am [Fig. 25] die bn schneidet, $\angle abn$ nicht $< \angle bam$ ist, bc die gerade Verlängerung von ab ist und $\angle cbn$, $\angle cam$ beide geometrisch proportioniert *verkleinert* werden, zum Beispiel bis $\angle cbq$, $\angle cap$, so daß $\angle cbn : \angle cbq = \angle cam : \angle cap$ ist, daß, sage ich, alsdann auch $a\mathfrak{p}$, $b\mathfrak{q}$ sich schneiden ... Allein auch das Umgekehrte hiervon wäre zur Ermöglichung eines Beweises des XI. Axioms auf dem damals eingeschlagenen Wege notwendig gewesen, daß nämlich ... der Satz auch bei geometrisch-proportionierter *Vergrößerung* der früheren Winkel abn, cam oder auf der anderen Seite um a, b herum gelte. Nun aber weiß ich nicht und kann mich nach Verlauf von etwa dreißig Jahren durchaus nicht mehr erinnern, wie es zugehen konnte, daß und wie ich, der ich doch schon seit meinem neunten Jahre, als ich nämlich Mathematik und zwar Euklids Elemente anfing zu studieren, sehr und vollkommen fest war in der Einsicht, daß die Umkehrungen von bereits bewiesenen Sätzen ebenfalls und nicht minder erst bewiesen werden müssen, wenn und bevor man auch Gebrauch davon machen will, oder daß also daraus, daß jedes *A* eines von den *B*'s ist, zum Beispiel, daß jeder Mensch ein Tier sei, noch keineswegs schon sogleich folge, daß auch jedes *B* eines von den *A* sei, — wie ich, sage ich, gewiss nicht aus Ungründlichkeit, sondern aus plötzlicher Übereilung diesen Umstand einen Augenblick übersehen und vergessen habe, auf die Notwendigkeit eines Beweises des Gegenfalls gehörig Bedacht zu nehmen, und mich

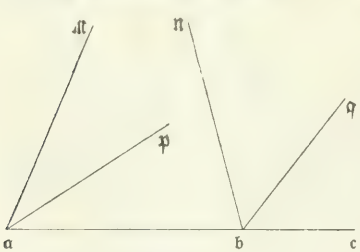


Fig. 25.

durch die übrigens allfällige vorzügliche Eleganz, Neuheit, eigene überraschende Wendung des übrigen Teils des damals eine sehr kurze Zeit hindurch für wahr gehaltenen Beweises verblenden lassend und hingerissen, allsogleich bei näherer, aufmerksamerer Prüfung die große Lücke entdeckend und dadurch von meinem damaligen falschen und zu frühzeitigen Himmel teils zwar insofern mit großem Leidwesen, teils aber in Anbetracht dessen, daß ich auch durch Wahrnehmung meines Fehlers der Wahrheit und dem Ziele, wenigstens in *negativem* Sinne, nur desto näher gerückt sei, zu meiner Freude und mich hiermit tröstend, herabgestürzt. Genug, ich glaubte denn einen Augenblick, den obigen Satz allgemein bewiesen zu haben."

Zum XI. Kapitel

S. 85, Z. 5—9. Aus der Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856).

S. 85, Z. 19 v. u. — S. 86, Z. 2. Den Brief Johanns an seinen Vater vom 3. November 1823 hat Prof. Dr. Martin Schmidt in Budapest, ein Sohn des Baumeisters Franz Schmidt, dem während der Jahre 1879—1894 von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften der Nachlaß Johanns zur Durchsicht überlassen worden war (vgl. S. 200), im Jahre 1884 aufgefunden. Er ist zuerst von Koloman v. Szily in dem Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Anzeiger der Akademie (Mathematikai és természettudományi Értesitö), Bd. 5 (1887) veröffentlicht worden. Eine deutsche Übersetzung der Mitteilung Szilys ist 1887 in den Mathematischen und naturwissenschaftlichen Berichten aus Ungarn, Bd. 5, S. 187—189 unter dem Titel *Ein auf den Appendix des Tentamens bezüglicher Brief Johann Bolyais vom Jahre 1823* erschienen. Über die hier in deutscher Übersetzung wiedergegebene, auf die Entdeckung der absoluten Geometrie bezügliche Stelle hat F. Schmidt auf der Naturforscher-Versammlung in Wien 1894 berichtet; sie ist im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4 (1897), S. 108 abgedruckt. Endlich ist der Festschrift, die die Universität Klausenburg zum hundertjährigen Geburtstage Johanns im Jahre 1903 herausgegeben hat, eine getreue Nachbildung des ganzen Briefes nebst einer lateinischen Übersetzung beigegeben. Die Stelle, auf die es ankommt, lautet dort folgendermaßen:

„Statutum ac deliberatum habeo de parallelis, simulac, quae inveni, in ordinem digesserim, perfecerim atque ut primum potuerim, opusculum me editurum esse. Hoc ipso momento temporis res nondum excogitata est, sed via, quam ingressus sum, propositum mihi finem, si fines ille alioquin attingi potest, pro certo fere promisit. Elaboratum quidem nondum est, sed tam mira deduxi, ut ipse etiam admiratione stupeam, irreparabileque damnum esset, si ignota manerent. Si legeris, Carissime Pater, probata tibi erunt. Nunc amplius nihil, nisi me ex nihilo novum et alium mundum creavisse, omniaque, quae adhuc miseram, casam esse pro turri. Persuasum mihi habeo hoc non minori laudi mihi fore, quam si iam perfecerim."

S. 86, Z. 3—13. Schlesinger, *Festrede*, S. 174.

S. 86, Z. 19—29. Aus dem Vorwort zur *Raumlehre* (um 1834).

S. 86, Z. 12—10 v. u. Siehe S. 94—95 und die zugehörigen Anmerkungen.

S. 86, Z. 10—7 v. u. Vgl. Stäckel und Engel, *Th. d. P.*, Abschnitt F. K. Schweikart und F. A. Taurinus, S. 237—286. Schweikart ist ebenfalls selbständig zur nichteuklidischen Geometrie gelangt; siehe auch Gauss, Werke, Bd. VIII (1900), S. 180—182.

S. 87, Z. 4. Die erste Auflage der *Anfangsgründe* war 1757 erschienen.

S. 87, Z. 15—19. Vgl. hierzu einen Zettel, datiert Lemberg, Januar 1832: „Er fand die Tendenz meiner Schrift, selbst als sie ganz in seine Hände geriet, so wenig, daß es schon viel war, wo er erst sagte: daß dieses ja *nur* die Ausarbeitung von S wäre, obschon Σ von S gewissermaßen nur *ein* besonderer Fall. Er hat ganz Unrecht, daß es nicht ein dringendes Bedürfnis wäre, gerade aus S selbst auszugehen, indem, wie in diesem Werke gezeigt wird, nur dadurch ein allgemeineres, höheres System, das *einzig* mögliche, aufgestellt werden kann. Es muß also unerläßlich sowohl a) ausgearbeitet werden, als wohl b) demselben jeder einen gleich dem täglichen Brot unschätzbaren Wert zuerkennen wird, der einsieht, daß man dadurch mit Recht sagen kann, man besitze eine vollkommene Raumlehre."

S. 87, Z. 19. — S. 88, Z. 13. Aus dem Vorwort zur *Raumlehre* (um 1834). Zur Ergänzung sei noch eine Äußerung Johanns mitgeteilt, die sich auf einem Zettel befindet, dessen Rückseite eine Notiz mit dem Datum November 1833 trägt.

„Er [Wolfgang] gesteht freimütig, dieses sei ihm nicht gelungen, und gibt zu, daß, wenn es mir gelungen wäre, es sehr schön und originell wäre; [daß] es ein großer Gewinn sei, die [euklidische] Geometrie auf F wahr zu finden; die [ebene] Geometrie würde dadurch gerettet. Wie aber mit der Solidometrie? Es wäre ihm jedoch noch lieber, wenn es auf einer mit einer Ebene parallelen [äquidistanten] Fläche wäre, weil es einfacher ist und mehr vor Augen liegt, indeß wäre es auch auf jene Art zierlich; nur glaube er es schwerlich, nicht weil er es umsonst versuchte, sondern weil es ihm scheine, daß man alsdann auf irgendeine Art den Satz von F, L auch auf die *Ebene* zurückführen könnte. — Was für Ideen! Sieht doch jeder auf den ersten Augenblick ein, daß, wenn der Satz auf [einer] mit einer Ebene parallelen [äquidistanten] Fläche gilt, selber notwendig auch auf der Ebene gelte."

S. 88, Z. 14 — S. 89, Z. 20, Schlesinger, *Festrede*, S. 179—181.

Schlesingers Auffassung wird bestätigt durch eine Äußerung Johanns, die sich in dem Entwurf einer Einleitung zur *Raumlehre* aus dem Jahre 1851 findet: „[Es] spräche zwar neben anderen Umständen und Eigenschaften der Euklidschen, auf das XI. Axiom begründeten Geometrie als jenen der ausschließlichen Einzigkeit und größten Einfachheit derselben . . . [für deren Stattfinden in der Wirklichkeit] hauptsächlich der von mir in diesem Werke streng bewiesene Umstand, daß, im Falle eine diesfällige Entscheidung dennoch möglich wäre, selbe nur zu Gnaden des Euklidschen Systems ausfallen könnte, einigermaßen für die Wirklichkeit derselben oder die Unwahrheit des Anti-Euklidschen, nämlich auf der Voraussetzung der nicht-allgemeinen Wahrheit des XI. Euklidschen Axioms . . . gebauten Raumsystems; allein gebührend klar und streng entscheidend können und dürfen alle diese Umstände vernünftigerweise dennoch und ewig nur um so weniger angesehen werden, als die vorerwähnte Voraussetzung der Entscheidbarkeit und somit auch der darauf gebaute Entschluß einer Entscheidung für das Euklidsche System durchaus und gänzlich wegfällt, und bloß äußere sinnliche *Wahrscheinlichkeit* unsere sichere und

untrügliche Leiterin, sobald es sich, wie [es] hier der Fall ist, um völlige Gewißheit und Klarheit handelt, nicht sein kann, und Augenmaß, um mit Hoffmann [*Kritik der Parallelntheorie*, Jena 1807] zu reden, unser geometrischer Maßstab nicht sein kann, und eben darin der Vorzug und die Kraft wissenschaftlicher Lehren vor bloßer äußerer sinnlicher Wahrscheinlichkeit [liegt], daß jene unendlich weiter gehen als unsere begrenzten äußeren Sinne, ja sich auf alle in dem betreffenden Satz ausgesprochenen Fälle erstrecken. Und könnte der Augenschein z. B. bei inneren Winkeln, deren Summe so sehr nahe zu $2R$ wäre, daß das Auge den Unterschied zu bemerken durchaus unfähig wäre, über das Stattfinden eines Durchschnittes hier offenbar gar nicht mitsprechen. Ja, es hörte natürlicherweise selbst die Art auf, um so etwas mehr in Frage stellen zu können, da bei 2 Winkeln [deren Summe] $= 2R$ zwar gewiß kein Durchschnitt erfolgt, hier aber der Schenkel des einen Winkels bei dem einen Winkelpaare mit dem des einen Winkels bei dem andern Winkelpaare in betreff unseres Auges vereinigt ist, und man offenbar mit gleichem Rechte auch viele andere der ersten und einfacheren Lehrsätze z. B. daß in jedem Dreieck der größeren Seite usw. und umgekehrt, in die Reihe der geometrischen Axiome stellen könnte; so wenig aber sich irgend ein Geometer, zumal aus der Strenge liebenden Schule Euklids, eine derlei Verwegenheit erlaubt, ebenso wenig kann er auch umgekehrt bei dem XI. Axiom sich eines Beweises vor einer etwaigen Behauptung desselben entledigt fühlen."

S. 89, Z. 10 v. u.—S. 90, Z. 20; S. 90, Z. 23—35. Aus der Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856).

S. 90, Z. 5—3 v. u. Siehe Kapitel XIII, S. 118—123.

S. 91, Z. 7—18. *Br. G.-B.*, S. 102.

S. 91, Z. 17 v. u. Das „Werkchen" ist wohl identisch mit einem in Gaussens Nachlaß vorhandenem Sonderabzug des *Appendix*, in dem die Druckfehler mit der Feder verbessert sind. Der Titel lautet abweichend von dem späteren Drucke im *Tentamen* (siehe S. 183 des zweiten Teiles dieses Buches):

Appendix prima

Scientia Spatii, a veritate aut falsitate Axiomatis XI^mi Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independens: atque ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.

Auctore, Auctoris Filio Johanne Bolyai, de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Locumtenente Primario.

S. 91, Z. 16—4 v. u. *Br. G.-B.*, S. 106—107.

S. 92, Z. 18 v. u. — S. 94, Z. 13. *Br. G.-B.*, S. 109—112.

S. 92, Z. 10—9 v. u. Das Wenige, was Gauss zu Papier gebracht hatte, ist aus dem Nachlaß Werke, Bd. VIII (1900), S. 202—209 abgedruckt worden. Es stammt aus April-Mai 1831, denn in einem Briefe an Schumacher vom 17. Mai 1831 sagt Gauss, er habe vor einigen Wochen begonnen, von seinen Meditationen über die Theorie der Parallellinien, die schon gegen 40 Jahre alt seien, von denen er aber früher nie etwas aufgeschrieben habe, doch einiges aufzuschreiben.

S. 93, Z. 12—16. Vgl. hierzu die S. 232 mitgeteilte Bemerkung von Johann. In den Aufzeichnungen, die Gauss im April-Mai 1831 gemacht hat, wird (Werke, Bd. VIII, S. 209) der Parazykel *Trope* genannt: dieser Ausdruck bedeutet nichts anderes als *Wendekreis* (ὁ τροπικὸς κύκλος, französisch

cercle tropique), weil der Parazykel die Grenze zwischen den Kreisen und den Hyperzyklen bildet.

S. 93, Z. 12—11 v. u. Über die Kubatur des Tetraeders vgl. S. 109—118 sowie die zugehörigen Anmerkungen.

S. 93, Z. 6 v. u. — S. 94, Z. 3. Die auf die Definition der Ebene bezüglichen Notizen von Gauss sind aus dem Nachlaß in Bd. VIII der Werke, S. 193—199 abgedruckt worden; im besonderen kommt hier die Notiz [3] in Betracht mit der Überschrift *Begründung des Planums*, weil sie wahrscheinlich von Gauss im März 1832, als er den Brief an Wolfgang schrieb, in ein Handbuch eingetragen worden ist. Daß sich Gauss schon sehr früh mit der Definition der Ebene beschäftigt hat, zeigt eine Stelle aus seinem wissenschaftlichen Tagebuche vom 28. Juli 1797: „Plani possibilitatem demonstravi".

S. 94, Z. 4—8. Anzeige der *Theoria residuorum biquadraticorum. commentatio secunda*, Werke, Bd. II. S. 177:

„Dies r Unterschied zwischen rechts und links ist, sobald man vorwärts und rückwärts *in* der Ebene und oben und unten in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, *in sich* völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes andern *nur* durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mitteilen können." In einer Anmerkung setzt Gauss hinzu: „Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung, daß der Raum *nur* Form unserer äußeren Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegenteil, und daß der Raum unabhängig von unserer Anschauung eine reelle Bedeutung haben muß, beweiset." Die Äußerung Kants findet sich in den *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik*, Riga 1783, § 13; in der Abhandlung *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume*, 1768, hatte Kant umgekehrt aus dem Vorhandensein symmetrischer Figuren die absolute Realität des Raumes zu erweisen versucht.

S. 94, Z. 14—S. 95, Z. 20. Über die Entwicklung der Gedanken von Gauss über die Grundlagen der Geometrie vgl. auch Stäckel und Engel, *Th. d. P.*, S. 215—216; Stäckel und Engel, *Gauss und die beiden Bolyai*, Math. Annalen 49 (1897), S. 150—152, Engel, S. 374—383.

S. 95, Z. 13—9 v. u. P. Szabó, *Adalékok Gauss és Bolyai levelezéséhez és Bolyai Farkas életrajzához*, Mathematikai és természettudományi Értesitö, 1907, S. 326—338; *Beiträge zum Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai und zur Biographie von W. Bolyai*, Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Bd. 25, 1907, S. 226—240. Beiden Abhandlungen ist ein Faksimile des Gaussschen Briefes vom 6. März 1832 beigegeben. Die Veröffentlichung enthält auch die vier „kommissionellen" Briefe von Gauss an Wolfgang, sodaß der Briefwechsel von Gauss und Wolfgang Bolyai jetzt vollständig vorliegt.

S. 95, Z. 4—2 v. u. *Br. G.-B.*, S. 81.

S. 96, Z. 12—39. Aus einem Vorwort zur *Allheillehre* (nach 1851). Vgl. auch die Äußerungen Johanns in dem Entwurf zu der Eingabe an den Erzherzog Johann vom 3. Mai 1832, S. 230—231. In ein Handexemplar des *Appendix*, das sich jetzt im Besitz der Ungarischen Akademie der Wissenschaften befindet, hat Johann hinten auf eine leere Seite folgende *Anmerkung* eingetragen:

„Des Verfassers Schuld könnte es doch offenbar nie sein, wenn allen Falls ein Urtheil hierüber bloß deshalb schief und geringschätzend ausfiele, weil betreffender Recensent nicht gehörig Meister der Sache geworden ist."

„Zur Erleichterung der Beurtheilung und Vorbereitung wird es gut sein, wenn mit dem Wesen der Sache noch nicht Vertraute das von k. k. Oberstleutnant Freiherrn von Vega am Ende des 2. Bandes seiner hochschätzbaren Vorlesungen über die Mathematik anempfohlene Werk unter dem Titel ‹Critik der Parallel-Theorie von Joh. Jos. Ign. Hoffmann, Jena 1807› fleißig lesen, indem selbst sonst berühmte Mathematiker hinsichtlich dieses Gegenstandes nicht nur ganz befangen und im Dunkel, sondern Anfangs sogar unempfänglich und gleichgültig sind, die sich jedoch dann niemals zur Klasse der Geometer vom ersten Range bekennen dürfen."

S. 96, Z. 1 v. u. — S. 97, Z. 10. Schlesinger, *Festrede*, S. 181.

Zum XII. Kapitel

S. 98, Z. 8—17. *Br. G.-B.*, S. 118.

S. 98, Z. 18—20. Szily, S. 35.

S. 99, Z. 5—40. Bedőházi, S. 304—306.

S. 99, Z. 12—3 v. u. Statt „in der Vorrede zu seiner *Raumlehre*" muß es heißen „in seinen biographischen Aufzeichnungen", wie bei Bedőházi, S. 305 richtig zu lesen ist. Gemeint ist Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856).

S. 100, Z. 13—27. Bedőházi, S. 303—304.

S. 100, Z. 13—8 v. u. *Br. G.-B.*, S. 103—104.

S. 101, Z. 11. Nach Wolfgangs Tode haben seine Söhne Johann und Gregor das Gut Domáld an die evangelische (sächsische) Kirchengemeinde Malldorf für 1600 Rheinische Gulden verkauft und 1857 auch den von Wolfgang hinzuerworbenen Wald veräußert.

Zum XIII. Kapitel

Als Quelle für dieses Kapitel hat hauptsächlich gedient die Abhandlung *Untersuchungen aus der absoluten Geometrie*, aus Johann Bolyais Nachlaß herausgegeben von P. Stäckel, Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Bd. 18, Jahrg. 1900 (1903), S. 280—307.

S. 102, Z. 5—15. Siehe den zweiten Teil dieses Werkes, S. 96—97.

S. 102, Z. 16—25. *Br. G.-B.*, S. 115—116.

S. 103, Z. 12—22. Siehe den zweiten Teil dieses Werkes, S. 216.

S. 103, Z. 16 v. u.—S. 104, Z. 6. Zettel aus der Zeit um 1833.

S. 104, Z. 13 — S. 105, Z. 6. Siehe den zweiten Teil dieses Werkes, S. 229—230.

S. 109, Z. 11—12. Hierbei ist allerdings ein gewisser Vorbehalt zu machen; die Parasphäre unterscheidet sich nämlich von der Euklidischen Ebene insofern, als diese Ebene in eine kongruente Ebene übergeht, wenn man sie um eine ihrer Geraden durch 180^0 dreht, was für die Parasphäre nicht zutrifft; es dürfen mithin nur diejenigen Sätze der Euklidischen Geometrie, die ohne Benutzung einer solchen Umlegung bewiesen sind, ohne weiteres auf die Parasphäre angewendet werden; vgl. auch Engel, S. 337—338.

S. 109, Z. 15. C. F. Gauss, Commentationes Gottingenses, Vol. 6 (1828), Werke, Bd. IV, S. 217—258; Ostwaldt's Klassiker der exakten Wissenschaften, Heft 5, 2. Aufl., Leipzig 1900.

S. 109, Z. 21. Beltrami, *Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea*, Giornale di Matematiche, Vol. 6 (1868), S. 284—312; Opere matematiche, Tomo 1 (1902), S. 374—405.

S. 109, Z. 1 v. u. Gauss hat über die Bestimmung des Tetraedervolumens wie überhaupt über die absolute Geometrie nichts veröffentlicht. Was sich in seinem Nachlaß über das Tetraedervolumen hat finden lassen, ist in den Werken, Bd. VIII (1900) abgedruckt worden; es ist eine Notiz *Cubirung der Tetraeder* (S. 228), wahrscheinlich im März 1832 niedergeschrieben (vgl. S. 113 dieses Teiles), und eine Bemerkung *Astralgeometrie* (S. 232—233), die vermutlich aus dem Jahre 1841 stammt.

N. I. Lobatschefskij hat sich eingehend mit der Frage der Volumenbestimmung in der absoluten Geometrie beschäftigt und im besonderen über die Kubatur der dreiseitigen Pyramide umfangreiche Untersuchungen angestellt, vgl. seine Abhandlungen *Über die Anfangsgründe der Geometrie* (1830), in deutscher Übersetzung bei Engel, S. 53—59, *Imaginäre Geometrie* (1835) und *Anwendungen der imaginären Geometrie auf einige Integrale* (1836), in deutscher Übersetzung bei H. Liebmann, *N. I. Lobatschefskijs Imaginäre Geometrie*, Leipzig 1904, S. 46—49, 82—117.

S. 112, Z. 2—1 v. u. Johann hat hierzu die Bemerkung gemacht, wenn man die Höhe x des Körpers K unbegrenzt wachsen lasse, so wachse das Volumen K auch über alle Grenzen, *dagegen behalte der Körper eine endliche Oberfläche.* Daß hier ein Irrtum vorliegt, hat Dannmeyer gezeigt (*Die Oberflächen- und Volumenberechnung für den Lobatschefskijschen Raum,* Dissertation, Kiel 1904, S. 40).

S. 113, Z. 1—12. Diese Vermutung wird fast zur Gewißheit erhoben durch eine Bemerkung, die Johann in dem Entwurf zu der Eingabe an den Erzherzog Johann vom 3. Mai 1832 zu der aus dem Briefe von Gauss angeführten Stelle macht (Anmerkung zu S. 93, S. 233): „Sowohl hat sich Gefertigter mit dieser Aufgabe schon früher beschäftigt gehabt, als diese Schlüsse von Gauss bestätigt gefunden. Jedoch steht ihm noch ein kräftiger Versuch bevor."

S. 116, Z. 1—4. Vgl. die Anmerkung zu S. 109, Z. 1 v. u.

S. 117, Z. 18 v. u. J. Frischauf, *Die Kubatur des Tetraeders*, Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Bd. 20, Jahrg. 1902 (1905), S. 92—95.

S. 117, Z. 2 v. u. — S. 118, Z. 1. N. I. Lobatschefskij, *Anfangsgründe*, Engel, S. 48, 53, 56; *Anwendung*, Liebmann, S. 80, 99; vgl. auch die Dissertation von Dannmeyer, *Die Oberflächen- und Volumenberechnung für den Lobatschefskijschen Raum*, Kiel 1904, S. 41—55.

S. 118, Z. 14—20. Eine vergleichende Darstellung der Untersuchungen von Johann Bolyai, Gauss und Lobatschefskij über das Volumen des Tetraeders hat Dannmeyer in seiner Dissertation *Die Oberflächen- und Volumenberechnung für den Lobatschefskijschen Raum*, Kiel 1904 gegeben. Hier wird auch die sonstige ziemlich spärliche Literatur angeführt: v. Frank, Archiv d. Math. u. Phys. Bd. 59 (1876), S. 76; Quensen, Dissertation, Göttingen 1884, H. W. Richmond, Quarterly Journal, vol. 34 (1902), S. 175. Seitdem hat Sforza dem Gegenstande mehrere Abhandlungen gewidmet: Atti

della società dei naturalisti e matematici di Modena, ser. 4, t. 9 (1906). Memorie della accademia di Modena, t. 3 (1907). Atti della accademia di Torino t. 43 (1908), S. 1047, t. 44 (1909), S. 957. Atti della soc. dei nat. e mat. di Modena, ser. 4, t. 9 (1908), Periodico di matematica, vol. 24 (1909).

Endlich sei noch auf die Darstellung hingewiesen, die Liebmann, *Nichteuklidische Geometrie*, Leipzig 1905 (2. Aufl. 1912), S. 156—162 gegeben hat.

S. 118, Z. 13—10 v. u. Fast die ganze Abhandlung Lobatschefskijs *Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale* (1836) ist der Frage der analytischen Darstellung der Integralformeln für das Tetraedervolumen gewidmet; vgl. auch Engel, S. 409.

S. 118, Z. 4 v. u. — S. 119, Z. 4. Mit der Frage der „praktischen Entscheidung" hatte sich auch Gauss beschäftigt. Sartorius von Waltershausen, Gauss *zum Gedächtnis*, Leipzig 1856, erzählt (S. 81): „Die Geometrie betrachtete Gauss nur als ein konsequentes Gebäude, nachdem die Parallelentheorie als Axiom an der Spitze zugegeben sei; er sei indeß zur Überzeugung gelangt, daß dieser Satz nicht bewiesen werden könne, doch wisse man aus der Erfahrung, z. B. aus den Winkeln des Dreiecks Brocken, Hohenhagen, Inselsberg, daß er näherungsweise richtig sei." Ferner hatte Schweikart (Gauss, Werke Bd. VIII, S. 180) der euklidischen Geometrie eine *astralische* Geometrie gegenübergestellt, bei der die dem Bolyaischen i entsprechende Konstante gegenüber den im täglichen Leben vorkommenden Entfernungen unermeßlich groß ist. Für N. I. Lobatschefskij vgl. S. 154—156 des Textes. Dort wird auf dessen *Geometrische Untersuchungen* vom Jahre 1840 Bezug genommen, Lobatschefskij hatte sich aber in demselben Sinne schon in den *Anfangsgründen* (1829/30), bei Engel S. 22—25, geäußert; in seinem letzten Werke, der *Pangéométrie* vom Jahre 1856, ist er darauf zurückgekommen, deutsche Übersetzung von H. Liebmann, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Heft 130, Leipzig 1902, S. 76—78. Neuerdings sind auf den Gegenstand eingegangen K. Schwarzschild, *Über das zulässige Krümmungsmaß des Raumes*, Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft, Bd. 35, Berlin 1900, S. 337—347 und P. Harzer, *Die Sterne und der Raum*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 17 (1908), S. 237—267.

Während es sich bei den soeben aufgezählte Untersuchungen um Messungen im Bereiche der *Fixsterne* handelt, hat Wolfgang Bolyai im *Tentamen* (1832) einen anderen Gesichtspunkt hervorgehoben, der noch nicht die verdiente Beachtung gefunden hat, daß man nämlich aus der Bewegung der *Planeten* Schlüsse auf die Beschaffenheit des Raumes ziehen könne, weil eine sehr kleine Abweichung vom Euklidischen Raume im Laufe der Zeit merkliche Abweichungen der Planeten von ihren euklidischen Orten herbeiführen würde; vgl. S. 96 des zweiten Teiles dieses Werkes und die Bemerkungen Johanns, S. 106—107 des ersten Teiles. Anfänge zur Untersuchung der Bewegung der Planeten in Räumen konstanten Krümmungsmaßes haben gemacht Lipschitz, *Extension of the planet-problem to a space of n dimensions and of constant integral curvature*, Quarterly Journal, 12 (1873), S. 349—370; Cayley, *Note in illustration of certain general theorems obtained by* Dr. Lipschitz, Quarterly Journal, 12 (1873), S. 346—349. Papers, vol. 9, S. 110—112; Killing, *Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen*,

Journal für r. u. a. Mathematik, 98 (1885), S. 1—49; C. Neumann, *Ausdehnung der Kepplerschen Gesetze auf den Fall, daß die Bewegung auf einer Kugel stattfindet*, Leipziger Berichte, 38 (1886), S. 1—2; Phragmén *Om nagra med det Poincaré'ska fallet af trekropparsproblemet beslägtade dynamiska uppgifter* (Über einige mit dem Poincaréschen Fall des Dreikörperproblems in Beziehung stehende dynamische Aufgaben), Bihang till Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, 15, Abt I, Stockholm 1890, Nr. 13; H. Liebmann, *Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im Nicht-Euklidischen Raum*, Leipziger Berichte, 54 (1902), S. 393—423 und *Die Zentralbewegung in der Nicht-Euklidischen Geometrie*, Leipziger Berichte, 55 (1903), S. 146—153; vgl. ferner die historisch-kritischen Bemerkungen von Stäckel, *De ea mechanicae analyticae parte, quae ad varietates complurium dimensionum spectat* in der Festschrift der Universität Klausenburg zum 100. Geburtstag Johann Bolyais (1902), S. 70 und *Bericht über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 12 (1903), S. 476.

Zum Schluß möge noch auf die skeptischen Äußerungen H. Poincarés hingewiesen werden, *La science et l'hypothèse*, Paris 1902, Chap. V.

S. 119, Z. 14—15. *Br. G.-B.*, S. 115—116.

S. 122, Z. 8—12. Vgl. Johanns *Abhandlung über die imaginären Größen*, Schluß des § 4, zweiter Teil dieses Werkes, S. 225.

Zum XIV. Kapitel

Als Quelle für dieses Kapitel hat hauptsächlich gedient Stäckels Abhandlung *Johann Bolyais Theorie der imaginären Größen*, Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Bd. 16, Jahrg. 1898 (1899), S. 263—297.

S. 124, Z. 12 v. u. Zum Beispiel schreibt Johann in der Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856): „Als ich ihm [dem Vater] später noch Mehreres, namentlich die Entdeckung der beiden Dreiecks-Lehren, überhaupt [der] Raum-Lehre mitteilte, wurde er, statt sich darüber zu freuen, unwillig, was mich im Bewußtsein meines redlichen Strebens, um so mehr als ich damals [seit 1829] schon Oberleutnant, also ein Mann von Charakter war, freilich auch nicht wenig überraschte und befremdend verdroß, woraus seiner- und dann auch meinerseits heftige Ausbrüche entstanden. . . ."

S. 124, Z. 3 v. u. — S. 125, Z. 17. Bedőházi, S. 295—296.

S. 125, Z. 7 v. u. Buée, *Mémoire sur les quantités imaginaires*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Part. I, London 1806, S. 23—88. C. V. Mourey, *La vraie théorie des quantités negatives et des quantités prétendues imaginaires*, Paris 1828. J. Warren, *On the geometrical interpretation of the square roots of negative quantities*, Cambridge 1828, vgl. auch Phil. Trans., London 1829, S. 241—254. Drobisch selbst hat am 5. Sept. 1848 der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften eine Abhandlung *Über die geometrische Konstruktion der imaginären Größen* vorgelegt, Leipziger Berichte, Bd. 2 (1849), S. 171—179, in der sich ausführliche Angaben über die Literatur finden. Vgl. auch H. Hankel, *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Funktionen*, 1. Teil, Leipzig 1867 und die Encyclopédie des sciences mathématiques, Tome 1, volume 1, fascicule 3,

Nombres complexes, exposé, d'après l'article allemand de E. Study, par E. Cartan, S. 337—338.

S. 126, Z. 11—34. Ein Brief, den Johann am 30. Dezember 1841 an den damaligen Sekretär der Jablonowskischen Gesellschaft, Prof. Hasse gerichtet hat, zeigt, daß der Vorfall sich am 17. Oktober 1837 ereignete; vgl. die Anmerkung zu S. 129, Z. 3—2 v. u.

S. 128, Z. 14 v. u. Das Urteil ist veröffentlicht in dem Intelligenzblatt der Allgemeinen Literaturzeitung (Halle—Leipzig), Bd. 5 (1838), Spalte 169.

S. 129, Z. 17—10 v. u. Ausführlicher auf Wolfgangs Abhandlung einzugehen, scheint hier nicht nötig, wohl aber mögen seine Ausführungen über den Begriff der Potenz der Wurzel und des Logarithmus auszugsweise wiedergegeben werden. Sie bilden den Inhalt des letzten, 16. Paragraphen. Aus der Multiplikation und Division, sagt Wolfgang, gehe der engere Begriff der Dignität (Potenz) hervor. Um den allgemeinen Begriff der Potenz zu erhalten, betrachtet er die Summe

$$f(a) = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots,$$

die für jedes endliche a einen Sinn hat und einen bestimmten Wert der Funktion $f(a)$ ergibt. Ist nun $f(b) = c$ und $f(bc) = V$, so soll V *Dignität vom Index* c *der Größe* c heißen und mit c^c bezeichnet werden. Umgekehrt heiße v *Wurzel vom Index* c *der Größe* V und werde mit $\sqrt[c]{V}$ bezeichnet. Endlich soll c *Logarithmus von* V *in bezug auf die Basis* c genannt werden. Alsdann entstehen die Fragen, ob es für jedes (reine oder gemischte) c ein solches b gibt, daß $f(b) = c$ wird und ob allgemeiner zu je zweien der drei Größen c, c, V je eine dritte gehört, und wenn das der Fall ist, wie beschaffene und wie viele Werte der gesuchten Größe man erhält? Es folgt die Einführung des natürlichen Logarithmus der Basis e und die Erklärung des Modulus. Im Scholion 2, mit dem die unvollständig erhaltene Handschrift abbricht, werden zunächst, wenn C, β und b Konstanten bedeuten, die wohlbestimmte Werte haben, alle Größen x, die der Gleichung $f(\beta x) = C$ genügen, mit dem gemeinsamen Namen $\varkappa$ bezeichnet, und alsdann die Sätze ausgesprochen:

1. Jedes $f(b\beta\varkappa)$ und nur dieses ist Dignität vom Index b der Größe C, nämlich $f(\beta\varkappa)$; C ist allein Dignität vom Index β eines jeden $f(\varkappa)$; dasselbe C ist Dignität von irgendeinem Index $\varkappa$ für die Größe $f(\beta)$.

2. C, nämlich $f(\beta\varkappa)$, ist allein Wurzel vom Index b eines jeden $f(b\beta\varkappa)$; jedes $f(\varkappa)$ ist allein Wurzel vom Index β der Größe $C = f(\beta\varkappa)$; $f(\beta)$ ist allein Wurzel vom Index $\varkappa$ der Größe $C = f(\beta\varkappa)$.

S. 129, Z. 3—2 v. u. Der vollständige Titel der Abhandlung Johanns, die im folgenden als *Responsio* angeführt wird, lautet:

Responsio ad quaestionem, discussionem dubii, num, et quibusnam conditionibus, quantitates vulgo pro imaginariis habitae, in geometria occurrentes construi possint necne, concernentem, ab Inclyta Societate Scientiarum Jablonoskiana Lipsiae anno 1837 motam.

Am 30. Dezember 1841 schrieb Johann aus Domáld an den damaligen Sekretär der Jablonowskischen Gesellschaft, Prof. Hasse zu Leipzig: „Da die am 17. Oktober des Jahres 1837 mit dem Motto *Fructus non nisi maturi decerpendi* bezeichnete, einer löblichen gelehrten fürstlich Jablonowskischen Gesell-

schaft der Wissenschaften zu Leipzig vorgelegte Dissertation: Die Konstruktion der imaginären Größen in der Geometrie, den Beifall einer löblichen gelehrten Gesellschaft, woran mir doch sehr viel lag, zu erhalten das Glück nicht hatte, so ersuchte ich Herrn Professor Wolfgang Bolyai, welcher soeben in ähnlicher Angelegenheit nach Leipzig schrieb, gefälligst bewirken zu wollen, daß die vorerwähnte Dissertation, als deren Verfasser ich mich hiermit bekenne, mir gütigst zugestellt werden möchte, indem ich solche, wie dessen auch darin erwähnt wird, als Wechselfieber-Patient in der Eile verfaßte oder vielmehr aus schon fertigen Ideen zusammensetzte, sodaß ich nicht einmal eine genaue Abschrift davon behalten konnte, und doch sehnlichst wünschte, dieselbe von den vorfindigen, von einer löblichen gelehrten Gesellschaft angedeuteten Mängeln nach Kräften zu befreien. Aus einem an Herrn Professor Bolyai gerichteten Antwortschreiben von seiten Euerer Hochwohlgeboren indessen entnahm ich eine Äußerung, der zufolge nur der eigentliche Verfasser selbst der oben genannten Dissertation deren Rückerstattung von einer löblichen gelehrten Gesellschaft verlangen könne."

Auf dem Briefe, der sich im Archiv der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft befindet, ist vermerkt: „Beantwortet den 15. Februar 1842 und die Abhandlung zurückgeschickt."

S. 132, Z. 4—27. R. W. Hamilton, *Theory of conjugate functions, or algebraic couples*, Transactions of the Royal Irish Academy, vol. 17, Dublin 1837, S. 393—423 (Read June 1, 1835).

S. 132, Z. 8 v. u.—S. 133, Z. 5. Vgl. die *Responsio*, § 11, zweiter Teil dieses Buches. S. 231 und S. 233 (Schlußsatz).

S. 133, Z. 6—1 v. u. Über Johanns späteren Versuche, die Theorie der imaginären Größen auszugestalten, wird im XVIII. Kapitel kurz berichtet werden; im Besonderen sei auf das S. 254—257 in der Anmerkung zu S. 179 mitgeteilte Bruchstück einer Bearbeitung der *Responsio* hingewiesen.

Zum XV. Kapitel

Als Quelle für dieses und das folgende Kapitel hat hauptsächlich die Abhandlung gedient *Johann Bolyais Bemerkungen über Nicolaus Lobatschefskys Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, ein Bericht erstattet von P. Stäckel und J. Kürschák, Mathematische und naturwissenschaftliche Mitteilungen aus Ungarn, Bd. 18, Jahrg. 1900 (1903), S. 250—279.

S. 134, Z. 5—11. Vgl. Engel, S. 419—420. Der Brief von Gauss an Schumacher ist abgedruckt in den Werken von Gauss, Bd. VIII (1900), S. 238—239.

S. 134, Z. 16—8 v. u. *Br. G.-B.*, S. 130, 134.

S. 135, Z. 22. Über Karl Szász vgl. S. 66 und 80—82 sowie die zugehörigen Anmerkungen.

S. 135, Z. 4—2 v. u. Das „ganz neu aussehende Buch", das Gauss von einem russischen Mathematiker erhalten hatte, ist höchst wahrscheinlich der in seinem Nachlaß vorhandene Sonderabdruck von Lobatschefskijs Abhandlung *Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale* (1836), und zwar hatte Gauss, wie aus einem Brief an Encke vom 1. Februar 1841 (Werke, Bd. VIII, S. 232) hervorgeht, diese Abhandlung von dem Physiker Ernst Knorr

erhalten, der 1832—1846 Professor an der Universität Kasan war; vgl. Engel, S. 437—441.

S. 137, Z. 12—14. Karl Szász ist zwischen Februar 1842 und August 1843 in Göttingen bei Gauss gewesen, vgl. S. 82 und die zugehörige Anmerkung.

S. 137, Z. 15—18. Siehe *Br. G.-B.*, S. 198—199, sowie S. 163 des Textes.

S. 138, Z. 14—11 v. u. Einen Teil der Einleitung enthält auch in deutscher Fassung ein Vorwort zur *Allheitlehre*, das aus der Zeit nach 1851 stammt; diese Aufzeichnungen sind für die Übersetzung aus dem Magyarischen benutzt worden.

S. 139, Z. 7—9. Vgl. *Tentamen*, T. II, editio secunda, S. 412—413; dort heißt es: „Auf Seite XVIII der oben erwähnten *Arithmetica Eleje* wurde eine *Schreibweise* vorgeschlagen, nach der es nicht nur keine zusammengesetzten Buchstaben gibt, sondern auch kein Buchstabe nacheinander zweimal geschrieben wird, ja sogar über gar keinem Buchstaben sich ein Punkt oder Akzent befindet und dennoch jeder Vokal, und zwar der kurze ein von dem langen unterschiedenes Zeichen hat, ohne daß hierzu ein neuer Buchstabe aufgenommen werden müßte: es werden die langen [Vokale] sowie die doppelt zu schreibenden [Buchstaben] durch einen (je nachdem es die Geläufigkeit der Schrift erfordert) oben oder unten gezogenen Strich angezeigt; das übrige wird mit einem der Kurrentschrift angepaßten (bei manchen Buchstaben horizontal, bei manchen von oben nach unten angebrachten) Zeichen angedeutet; auch heute wünschte ich etwas derartiges, damit die Aussprache unserer Sprache eine bestimmte und wenigstens unsere Schreibart eine uns eigentümliche sei; aber zur Bezeichnung des *gy* sollte mit dem erwähnten Zeichen versehen eher der Buchstabe *d* als *g* angewendet werden, weil *adjon* sich leicht in *aggyon* verwandelt, aber statt *vágjon* niemand *vággyon* sagt; — und es gibt noch zwei andere [Laute], für die besondere Zeichen nötig sind; man ersieht es aus den Worten *edzeni*, *findzsia* (von diesem sagte ein sechsjähriges Kind, daß man das mit keinem [Buchstaben] schreiben könnte, was wie [das *g* in] *giorno* lautet); *zs* wäre *z* mit jenem Zeichen versehen, *edzeni* würde ebenfalls mit *z* geschrieben werden, doch wäre jenes Zeichen verdoppelt in der Mitte anzuwenden, dies kommt ja ohnedies nur selten vor; wie auch der Laut [des *g* in] *giorno*, der mit dem vor das *g* gesetzte Zeichen angedeutet werden könnte."

Zum XVI. Kapitel

S. 141, Z. 1—3. In Wirklichkeit sind sogar außer Gauss, Johann Bolyai und Lobatschefskij noch Schweikart (gegen 1819), Taurinus (1829) und vielleicht auch Fourier zu nennen; über diesen vgl. Gauss Werke, Bd. VIII, S. 188—189.

S. 141, Z. 6—8. Josef Johann Littrow (1781—1840) war 1810—1816 Professor der Astronomie an der Universität Kasan gewesen. Er hat sich des jungen Lobatschefskij, der, 1793 geboren, von 1807—1812 an der Universität Kasan studierte und darauf dort als Magister Mathematik und Astronomie lehrte, wohlwollend angenommen; es scheint jedoch nicht, als ob nach dieser Zeit unmittelbare Beziehungen zwischen Littrow und Lobatschefskij bestanden haben, vgl. Stäckels Bemerkung bei Engel, S. 426.

S. 141, Z. 19—21. Lobatschefskijs Veröffentlichung im Kasaner Boten vom Jahre 1829—1830 ist die Abhandlung *Über die Anfangsgründe der Geometrie*, die in der Tat eine ausführliche Darlegung der imaginären Geometrie enthält. „Die neue Geometrie", sagt Lobatschefskij (Engel, S. 24) „kann, wenn sie auch in der Natur nicht besteht, nichtsdestoweniger in unserer Vorstellung bestehen, und wenn sie auch bei wirklichen Messungen außer Gebrauch bleibt, so eröffnet sie doch ein neues, weites Feld für die Anwendungen von Geometrie und Analysis aufeinander." Als Lobatschefskij in den Jahren 1815 und 1816 über Geometrie vortrug, stand er noch ganz auf dem Boden der Euklidischen Geometrie und machte sogar verschiedene Versuche zum Beweise des XI. Axioms. Im Jahre 1823 hatte er erkannt, daß die bisherigen Beweisversuche verfehlt seien, aber allem Anschein nach besaß er damals noch nicht seine neue Geometrie, wenn er ihr auch nahe sein mochte. Diese neue Geometrie betraf erst eine Abhandlung *Exposition succincte des principes de la Géométrie* avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles, die er am 12. Februar 1826 der physiko-mathematischen Abteilung der Universität Kasan vorlegte; die Abhandlung im Kasaner Boten ist, wie Lobatschefskij bemerkt (Engel, S. 1 und 21), ein Auszug der *Exposition*; vgl. auch Engel, S. 371—378.

S. 141, Z. 25—27. Über Karl Szász vgl. S. 66 und 82 des Textes und die zu S. 82 gehörige Anmerkung.

S. 145, Z. 14—29. Engel, S. 8.

S. 145, Z. 11—6 v. u. Engel, S. 112.

S. 146, Z. 5—3 v. u. *Études géométriques sur la théorie des parallèles*, par N. I. Lobatschewsky, traduit de l'allemand par J. Hoüel, Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, t. 4 (1866); S. 21—22 des Sonderabdrucks.

S. 146, Z. 3—1 v. u. Engel, S. 189—191; vgl. auch Engel, S. 33.

S. 147, Z. 22—24. Engel, S. 20.

S. 149, Z. 7—8. Euler hat in seiner *Dissertatio de fractionibus continuis*, Comment. acad. sc. Petrop. 9 (1737), 1744, S. 98—137 bereits die Kettenbruchentwicklungen gegeben, auf denen die Beweise für die Irrationalität von π von Lambert (1767) und Legendre (1794) beruhen; vgl. auch Rudio, *Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels*, Leipzig 1892, S. 55—56, Kürschák, *A körmérés elmélete és története* (Theorie und Geschichte der Kreismessung), Mathematikai es Physikai Lapok, Bd. 1—3 (1892—1894) und Pringsheim, *Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und* π, Münchener Berichte 28 (1898), S. 325—337.

S. 151, Z. 22—29. In der deutschen Übersetzung der *Pangéométrie* von H. Liebmann, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Heft 130, stehen die betreffenden Gleichungen auf den Seiten 11, 24, 38.

S. 152, Z. 15—23. Die Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F(\alpha) = e^{-\alpha}$$

(statt des Π in den *Geometrischen Untersuchungen* schreibt Lobatschefskij hier F) steht bei Engel, S. 20, die Gleichung

$$s' : s = e^{-x}.$$

S. 33; die Stelle in den *Neuen Anfangsgründen* findet sich bei Engel, S. 189—191.

S. 154, Z. 26—32. Vgl. die Ausführungen im XVIII. Kapitel, S. 185—188 des Textes.

S. 154, Z. 10—1 v. u. Vgl. die Anmerkung zu S. 118, Z. 4 v. u.

S. 156, Z. 9 v. u. — S. 157, Z. 19. Der Gedanke, die Bewegung der Planeten heranzuziehen, stammt von Wolfgang, der ihn im *Tentamen* ausgesprochen hat, siehe S. 96 des zweiten Teiles dieses Werkes. Der Vorschlag, in der Mechanik des absoluten Raumes die Massenanziehung im umgekehrten Verhältnis mit der Kugelfläche anzusetzen, deren Radius die Entfernung der sich anziehenden Körper ist, findet sich auch bei Lobatschefskij in den *Neuen Anfangsgründen* (1835). Engel S. 76; über die Folgerungen, die man in neuerer Zeit aus diesem Gesetz gezogen hat, vgl. die S. 243—244 angeführte Literatur, insbesondere die Abhandlungen von H. Liebmann.

S. 158, Z. 22—13 v. u. Vgl. hierzu auch S. 109 des Textes und die zugehörigen Anmerkungen, S. 242.

S. 158, Z. 9 v. u. — S. 159, Z. 18. Engel, S. 392—393.

S. 159, Z. 21 v. u. — S. 160, Z. 4. Engel, S. 393.

S. 160, Z. 5—21. Engel, S. 393—394.

Zum XVII. Kapitel

S. 161, Z. 12—25. *Br. G.-B.*, S. 128.

S. 161, Z. 10 v. u. Gauss hat in ein Notitzbuch, das er seit Juli 1798 zu führen begonnen hat (im Gauss-Archiv als Scheda Aa bezeichnet), die Verse eingetragen:

Thus let me weep alone,
Thus unlamented let me die,
And not a stone
Tells where I lie.

Sollte der Satz: *selbst kein Stein mehr von mir spricht* eine Anspielung auf gemeinsame englische Lektüre während der Göttinger Jahre sein? (Mitteilung von L. Schlesinger).

S. 161, Z. 8 v. u. — S. 162, Z. 12. *Br. G.-B.*, S. 132—133.

S. 162, Z. 14—35, *Br. G.-B.*, S. 137—139.

S. 162, Z. 2—1 v. u. Nach Wolfgangs Rücktritt wurde seine Professur zunächst durch Stellvertreter (Supplenten) versehen, und zwar vom Oktober 1851 ab durch Karl Szász (vgl. S. 66) und nach dessen am 23. Oktober 1853 erfolgten Ableben durch Franz Hegedüs. Dieser trat im März 1855 zurück und starb im folgenden Jahre. Im Juni 1856 wurde dann Franz Mentovich (vgl. S. 135) zum eigentlichen Nachfolger Wolfgangs gewählt; er hat die Stelle bis zu seinem Tode am 15. Dezember 1879 bekleidet. Neben Mentovich wirkte als Professor der Mathematik und Physik Samuel Szabó, geboren 1829 (vgl. S. 200), der sein Amt im September 1857 antrat und es bis zum Juli 1868 verwaltete, wo er nach Klausenburg übersiedelte; er ist 1905 in Budapest gestorben.

S. 163, Z. 5—9. *Br. G.-B.*, S. 199.

S. 163, Z. 10—14. Einen Bericht über die Beobachtungen, die Kreil und seine Gehilfen während des Jahres 1848 in Österreich-Ungarn angestellt hatten, findet man in dem Werke von Karl Kreil und Karl Fritsch. *Magnetische*

und geographische Ortsbestimmungen im österreichischen Kaiserstaate. 3. Jahrg. 1848, Mähren, Schlesien, das nördliche Ungarn, Siebenbürgen, Galizien. Prag 1850, S. 131—134. Vorgenommen wurden 1. magnetische Bestimmungen (Deklination, Inklination, horizontale Intensität), 2. astronomische Beobachtungen zur Zeit-, Längen- und Breitenbestimmung, 3. Barometervergleichungen und Höhenbestimmungen. Der Beobachtungsplatz in Maros-Vásárhely war „der Garten des Herrn Professors Bolyai, nächst der Minoritenkirche."

S. 163, Z. 15—31. *Br. G.-B.*, S. 197—198.

S. 163, Z. 3—1 v. u. Bedőházi, S. 276.

S. 164, Z. 6—16. *Br. G.-B.*, S. 138.

S. 164, Z. 1 v. u.—S. 165, Z. 5. *Br. G.-B.*, S. 143.

S. 165, Z. 6—13. *Br. G.-B.*, 144 und 146. Die Verse lauten im Lateinischen:

Ima et summa simul penetrans vix exstitit alter
Utraque digna etiam promovit acumine eodem.
Externum haud quaerens fulgorem, luce reperta,
Quam mors frangendo fracta ipsa extinguere nequit.
Atque Deo gaudens (ut Newton) pectore puro
Illius est socius per coelos ulteriores.

S. 165, Z. 18—21. *Br. G.-B.*, S. 147—148.

S. 165, Z. 26—31. Vgl. die Anmerkung zu S. 95.

S. 165, Z. 7 v. u. Die besten Traueranzeigen Wolfgangs sind die auf seinen Jugendfreund Baron Simon Kemény (1824) und auf Karl Szász (1853). Der Nachruf auf Szász möge hier, zugleich als eine Probe von Wolfgangs Schreibart, in einer deutschen Übersetzung mitgeteilt werden, die ich Herrn Ignaz Rados in Budapest verdanke.

Der ohnegleichen vortreffliche Professor der Mathematik und Physik, Karl Szász *de Szemerja, der ältere, ist nicht mehr!*

Es braust der den Eichenstamm fällende Sturm; aber das Gewicht, das die Uhr des Lebens in Bewegung setzt, sieht man auch dann nicht, wenn es fast die Erde erreicht hat. — Elender Sterblicher! werde es gewahr, daß du inmitten eines Pfeilregens stehst, — sieh' die riesige Kraft, wie sie auf einmal zusammengebrochen ist, und, wie vor den Ruinen einer alten Burg mit Ehrfurcht erfüllt, lerne, daß keinerlei Irdisches dich hochmütig mache! Demütige dich vielmehr vor der Ewigkeit, nachdem du die Lektion von der Vergänglichkeit begriffen hast, und erhebe dich mit zitternden Flügeln, dem alleinigen Gott entgegen.

Du hörst den Ruf der Totenglocke zu einer höheren Kirche, zur Versammlung der Gläubigen aus der ganzen Welt! das bittere Weinen der Witwe, die unerwartet ihren unvergleichlich treuen Gefährten verloren hat, und das der Waisen, deren in den Vater gesetzte Hoffnung zunichte wurde — von ferneher kommen seine Freunde, um ihre Tränen mit denen der hier Anwesenden zu vereinigen, und feucht sind überall die Augen.

Oh, es kann aber nicht sein, daß die alles übertreffende Güte eine Wunde schlage, ohne Balsam dafür zu bieten!

Die Geburt und der Tod sind zwei Wasser gießende Genien: jene begießt den neuen Sprößling für das irdische Leben und übergibt ihn diesem zur Taufe für ein höheres [Leben].

Welch' eine wunderbare Komposition auch dieses Leben sein möge, Weinen ist die Ouverture, Todeskampf das Finale, und dazwischen lösen die höllischen Dissonanzen, dadurch noch fühlbarer gemacht, himmlische Akkorde aus; weise ist es für die Erde bestimmt.

Da das Ziel weiter gesteckt ist, so mußte diese irdische Laufbahn so beschaffen sein, daß wir darauf wandeln und sie auch verlassen können; — kein Rang befreit von der Steuer des Lebens. Wir müssen leiden, damit wir nicht hochmütig werden — man sieht, daß niemand weiß, was ihm bis zu seinem Tode begegnen wird — oft schneidet der pfropfende Gärtner eine Wunde, um zu veredeln, und auf dem Kreuzpfahle des dem Donnerstag [der Himmelfahrt] vorangehenden Freitags [der Kreuzigung] befindet sich der Weg, der zum Himmel führt.

Unter Tränen, die aus den dem Verlorenen nachblickenden Augen fließen, mögen die mit verwundeten Herzen Trauernden sich beruhigen!

Jünglinge! die vereinigte Flamme fast aller Musen ist erloschen — der unvergleichlich leicht begreifende, blitzschnelle und vielseitige Verstand und die so vieles vermögende, kräftige körperliche und geistige Tätigkeit existieren für uns nicht mehr, — die während einer 32 Jahre dauernden Amtstätigkeit unermüdlich lehrende Zunge, die die ewigen Wahrheiten der Natur so entzückend und krystallrein vor euch aussprach, ist verstummt — ein mächtigerer Lehrer — der Tod — hat ihn von jener großen Tafel ausgelöscht, auf die ihn die höchste Hand hingeschrieben hat, — es möge die von ihm mitgeteilte Wissenschaft euch zu einem Andenken verbleiben, das eure Blüte überlebe, damit ihr, die ihr im Lebensalter der Unerfahrenheit auf die wegweisende Lampe der Alten des V. Gebotes geachtet habt, dann, wenn der alle Blumen verwelkende Wind anlangt — ebenso bereit seid, nach einem wärmeren Sonnenlicht zu ziehen, wie die bloß ihr Lehmnest zurücklassende Schwalbe und wie euer unvergeßlicher Lehrer, der am Mittagspunkte seines Lebens, kaum 56 Jahre alt, auf ein höheres Gebot sogar sein im Druck befindliches Werk sogleich im Stich ließ und bereit war, sein Lehmhaus der Muttererde zurückzugeben am 25ten dieses Oktobers [1853], abends um 8 Uhr.

S. 165, Z. 8—9 v. u. Eine Übersetzung der *Jelentés* verdanke ich Herrn Bezirksarzt Dr. Tarnowsky in Maros-Vásárhely; ihr sind die S. 165 und 166 mitgeteilten Stücke entnommen.

S. 166, Z. 23—24. Es handelt sich um die in Silber und Bronze ausgeführte Medaille, die König Georg V von Hannover nach dem Tode von Gauss zu dessen Andenken prägen ließ. Der Kopf ist auf den Titelblättern der Werke von Gauss wiedergegeben. Die Medaille trägt noch die Inschrift: Carolus Fridericus Gauss, nat. MDCCLXXVII Apr. XXX, ob. MDCCCLV Feb. XXIII.

S. 167, Z. 13—14. Die Briefe von Johann an Gregor (Gergely) sind jetzt im Besitz der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

S. 167, Z. 19—35. Bedőházi, S. 360—361.

S. 167, Z. 5—1 v. u. Th. Vass, *Bolyais letzte Tage*, Monatsschrift der Sigmund-Kemény-Gesellschaft 1896; abgedruckt im Budapesti Napló vom 26. Juli 1901; die mitgeteilte Übersetzung verdanke ich Herrn Prof. Ignaz Rados in Budapest.

S. 172, Z. 14—38. Aus der Vorrede zum *Beweis des XI. Axioms* (1856).

S. 172, Z. 1 v. u. Das *Tentamen* enthält außer dem von Johann verfaßten *Appendix* einen darauf bezüglichen Zusatz, in dem Wolfgang eine Mitteilung

Johanns wiedergibt (S. 216—219 des zweiten Teiles dieses Werkes), und dazu kommt eine Reihe von Bemerkungen, die Wolfgang als Eigentum des Verfassers des *Appendix* bezeichnet, zum Beispiel über die Erklärung der Ebene und der Geraden (S. 56 des zweiten Teiles dieses Werkes) und über die Erklärung ähnlicher geometrischer Gebilde (S. 58).

Zum XVIII. Kapitel

Als Quelle für den Bericht über Johanns mathematische Untersuchungen aus der Spätzeit hat hauptsächlich gedient die Abhandlung von P. Stäckel, *Johann Bolyais Raumlehre,* Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Bd. 19, Jahrg. 1901 (1904), S. 1—12.

S. 173, Z. 6—7. *Br. G.-B.,* S. 154.

S. 173, Z. 7—8. Durch Testament vom 31. Mai 1843 hatte Johann „zur Universalerbin mit Ausnahme seiner Violine infolge ihrer vieljährigen Dienstleistungen" seine Wirtschafterin Rosalie v. Orbán eingesetzt.

S. 173, Z. 17—10 v. u. Der Vertrag vom 26. Nov. 1852 ist im Besitz von Herrn P. Szabó (Budapest).

S. 174, Z. 17—20. Über Karl Szász vgl. S. 66 und 82 sowie die zugehörigen Anmerkungen.

S. 174, Z. 17—16 v. u. Daß Wolfgang auch in der Domälder Zeit Johanns Leistungen schätzte und anerkannte, zeigt eine Stelle aus der 1843 in zweiter Auflage erschienenen *Arithmetika elője* (S. 185): „Der *Appendix* ist ein Werk, das Folianten wert ist. Es ist ein für den wahren Geometer schönes, notwendiges, originelles und kolossales Werk, sodaß man von dem Verfasser etwas Ähnliches erwarten, ja fordern kann. Wie viele Denker haben bis in die neueste Zeit vergebens versucht, den einen Hauptgrund des Gebäudes der euklidischen Geometrie zu sichern! und es blieb doch nur eine bedingt dastehende Geometrie. In dem erwähnten Werk wurde eine unabhängige und für alle Fälle wahre Geometrie aufgestellt und gezeigt, daß es auch einen Raum gibt, in welchem das ganze System des Euklid wahr ist. In ihm wird die sphärische Trigonometrie unabhängig vom elften Axiom abgeleitet und in dem Falle, daß das elfte Axiom (dessen Wahrheit und Falschheit in gleicher Weise stattfinden kann) unwahr ist, die Quadratur des Kreises ausgeführt. Diese Arbeiten wurden von dem großen Gauss gelobt, aber nur wenige haben ihren Wert gewürdigt. Es ist, ohne viele Worte zu machen, wahrhaft klassisch."

S. 175, Z. 4—8. Näheren Aufschluß über Johanns Krankheit gibt folgende Stelle aus einem Briefe an seinen Vater:

„Auf Ihre Frage nach meinem Befinden schreibe ich über meine Krankheit; ohne dieselbe würde ich Sie mit dieser Sache, die bei Ihren größeren Sorgen für Sie weniger interessant ist, kaum belästigen. Die Ausschläge sind wohl größtenteils nach den (der Anzahl nach zusammen 9) nach je 3 mit einer Unterbrechung genommenen Jodbädern und nach dem innerlichen Gebrauch der nach den hier (erga restitutionem) beigelegten Rezepten hergestellten Jodpräparaten zurückgegangen, obwohl die Stelle einiger größeren, gleichsam von der Größe einer Linse, sozusagen fleischfarbig sichtbar ist. Aber das heftige Jucken, Brennen ist größtenteils noch dageblieben (obwohl gewissermaßen in anderer Art) . . . . Dagegen hat der D[octor] nach dem beiliegenden Rp.

Quecksilberwaschungen verordnet ..... Ich habe aber das ganze Waschen mit der Salbe nicht gern, ich fühle eine erstarrende Wirkung davon, und habe auch einen Speichelfluß davon bekommen, der aber bald vorüber war ...."

S. 177, Z. 1—10. Auf einem Zettel hat Johann die Aufgaben zusammengestellt, mit denen er sich damals beschäftigte und deren Lösung er in seiner Macht zu haben vermeinte:

1. Algebraische Auflösung aller Gleichungen.
2. Endige Integration jeden Differentials.
3. Endliche Summierung jeder endlosen Reihe.
4. Allgemeine Quadratur der Kreisfläche von etwa 6 Arten.
5. Endliche Form der Primzahlen aller Arten.
6. Vollständige rationale Auflösung jeder endlichen Gleichung oder Systems von Gleichungen.
7. Beweis des XI. Euklidischen Axioms.
8. Beweis der Endlich-Gleichheit aller gleichen Polyeder.
9. Vollkommene Bewegungslehre.
10. Vollkommene Flüssigkeitslehre.

Daß Johann wirklich gewähnt hat, die Quadratur des Kreises mittels Zirkel und Lineal entdeckt zu haben, zeigt das noch erhaltene Titelblatt zu einer Abhandlung:

„*Des Kreises Quadratur und zwar algebraische und zwar durch bloßes Quadratwurzelausziehen und somit durch geometrische Konstruktion, und zwar im allerstrengsten Verstande.* Von Johann Bolyai von Bolya, des k. k. Geniestabes Hauptmann in Pension."

Es scheint, als ob das Buch eines mathematischen Dilettanten bösester Art einen unheilvollen Einfluß auf Johann ausgeübt hat. In seinem Nachlaß findet sich nämlich das Werk: A. Vogel, Mathematiker in Leipzig, *Entdeckung einer numerischen Auflösung aller höheren endlichen Gleichungen von jeder beliebigen algebraischen und transzendenten Form.* Leipzig 1845.

S. 177, Z. 14—15. Als Beispiel sei folgende Notiz angeführt:

„Inwiefern die Grenzen eines bestimmten Integrals imaginär sein können, oder dasselbe auf imaginäre Grenzen ausgedehnt werden könne, ist ... meines Wissens noch von keinem Menschen erörtert worden. Hier nun will ich zeigen, daß und inwiefern die δ- und f-Lehre sich auch auf imaginäre Größen ausdehnen lasse. Ist $u = f(x, y, z, \ldots)$, so kann man erstlich $p + q$, $r + s$, ... bzw. statt $x, y, \ldots$ setzen, wodurch $v + V = g(p, q, r, s, \ldots) + h(p, q, r, s, \ldots)$, $v = g$, $V = h$, $dv = \frac{\partial v}{\partial p} dp + \frac{\partial v}{\partial q} dq + \cdots$, $dV = \frac{\partial V}{\partial p} dp + \frac{\partial V}{\partial q} dq + \cdots$, $d(v + V) = dv + dV = \cdots$ Andererseits wird, da die δ-Lehre leicht, wegen der Konvergenz, auch für imaginäre Änderungen gilt, zugleich x um $\triangle p + \triangle q$ geändert." Hier brechen die Aufzeichnungen leider ab.

Johanns Lehre vom Logarithmus und der Potenz ist schon im XIV. Kapitel erwähnt worden. Er kommt in den Aufzeichnungen der Spätzeit wiederholt darauf zurück und bemerkt zum Beispiel mit vollem Recht, daß man bei beliebigen, sogar komplexen Werten des Exponenten a den Differentialquotienten der Potenz x^a nur dann in Strenge herleiten könne, wenn man x^a durch $e^{a \ln x}$ ersetze.

Bemerkenswert ist auch die strenge Behandlung der Infinitesimalrechnung. Ihm sei schon als Knaben, sagt Johann, der Begriff der unendlich kleinen

Größen abstoßend und schrecklich gewesen; man dürfe nur davon reden, daß Größen gegen Null streben, dann aber sei die Strenge der Alten erreichbar, ja übertreffbar. Um anzudeuten, daß zwei Größen *nach Vollziehung eines gewissen Grenzüberganges* einander gleich werden, benutzt er ein besonderes Zeichen $\doteq$, das zum Beispiel in den *Bemerkungen zu Lobatscheefskijs Geometrischen Untersuchungen* (S. 153 des Textes) verwendet wird.

S. 178, Z. 9—11. Man vgl. besonders den Entwurf zu einem Titelblatt der Allheillehre, der in der Anmerkung zu S. 194, Z. 15 v. u. abgedruckt ist.

S. 178, Z. 17—27. Aus dem Vorwort zur *Raumlehre* (um 1834).

S. 179, Z. 12—17. *Br. G.-B.*, S. 103—104.

S. 179, Z. 10—5 v. u. Als Probe möge die deutsche Übersetzung einer in lateinischer Sprache geschriebenen Bearbeitung der beiden ersten Paragraphen der *Responsio* mitgeteilt werden, die Stäckel in seiner Abhandlung über *Johann Bolyais Theorie der imaginären Größen* (S. 276—280) abgedruckt hat.

§ 1.

Wenn jemand seine Geistestätigkeit zu dem Zwecke ausübt, bei andern dieselben Vorstellungen wie bei sich selbst zu erwecken, und noch mehr bei der Begründung eines wissenschaftlichen Systems, muß der Anfang notwendig darin bestehen, daß *Begriffe* gebildet oder konstruiert werden oder daß der Sinn aller *Worte und anderen Zeichen*, die bei der Betrachtung vorkommen, mittels gewisser *einfacher und undefinierbarer* Worte oder Begriffe bestimmt wird; solche gibt es notwendig, da es offenbar unmöglich und der Natur eines wissenschaftlichen Systems widersprechend ist, alles zu definieren, und ihre Bedeutung können wir anderen nur durch unmittelbares Vorzeigen und nur unvollkommen verständlich machen und sind gezwungen, einige bei dem Aufbau eines Werkes als bekannt vorauszusetzen. Darauf werden gewisse sehr einfache und aus der anderen nicht weiter herleitbare, an sich schon hinreichend deutliche Sätze aufgestellt (von denen man ebenfalls notwendig auszugehen hat). Endlich läßt sich die *Richtigkeit* oder *Falschheit* jedes anderen Satzes (wenn er in der Form eines Lehrsatzes gegeben wird) und die *Möglichkeit* oder *Unmöglichkeit* (wenn er in der Form einer Aufgabe ausgesprochen wird) nicht anders entscheiden, als indem untersucht wird, ob er aus den aufgestellten Axiomen folgt oder nicht (wobei man den Sinn der Definitionen sorgfältig beizubehalten und nach gewissen logischen Gesetzen zu schließen oder fortzugehen hat). Mithin läßt sich die vorliegende Untersuchung auf die drei folgenden Momente zurückführen:

1. zu definieren, was unter imaginären Größen zu verstehen ist,

2. zu definieren, was unter der *Konstruktion* derselben Größen verstanden wird,

3. endlich zu entscheiden, ob die imaginären Größen konstruiert werden können oder nicht? und in dem ersten Falle die Art und Weise einer solchen Konstruktion darzulegen.

Alles dieses werden wir nach der gehörigen Methode und mit aller wünschbaren Klarheit angreifen und durchführen. Diese Art der Betrachtung, auf die der Verfasser wie zu den Hauptmomenten der ganzen wahren Theorie der imaginären wie in gleicher Weise der reellen Größen bei einer Gelegenheit,

die noch zu nennen sein wird, bereits vor vielen Jahren gelangte*), ist ihm durch langen Gebrauch ganz vertraut geworden. Hier ist es freilich nur möglich mit größter Kürze das Unentbehrliche aus der Lehre selbst auszuwählen und vorzubringen, was jedoch für den gegenwärtigen Zweck genügt.

§ 2.

Nichts Unsinnigeres und der Vernunft mehr Widersprechendes läßt sich überhaupt ausdenken als der Versuch *Größeres von Kleinerem wegzunehmen*, und das leere Gerede von Größen, die kleiner als 0 sind, zeugt von Zeiten, in denen es manchmal sogar den hervorragendsten Geometern gefiel, einfache Wahrheit mit einem geheimnisvollen, dem gesunden Auge undurchdringlichen, Schleier zu umhüllen, indem sie, durch eine oberflächliche Behandlung des Gegenstandes in die Irre geführt, mit Scheinergebnissen zufrieden waren und dabei keine weiteren Bedenken hegten. Wenn man zum Beispiel Soll als negatives Haben, den Weg zur Rechten als den negativen Weg zur Linken, die Hyperbel (in der üblichen Geometrie, die auf dem von Euklid selbst mit Unrecht unter der Form des XI. Axioms aufgestellten Lehrsatz beruht) als eine Ellipse mit imaginärer kleinerer Achse ansieht und ebenso umgekehrt, wenn man von Größen spricht, die zu den positiv genannten Größen *hinzugefügt* jene *vermindern* (so daß $a + b$ kleiner als die positive Größe a wird, ja sogar so ausfallen kann, daß es selbst zu einer positiven Größe hinzugefügt diese nicht vermehrt), so kann dies niemand, der die Sache genauer prüft, billigen, sobald die Worte rechts, links, Hyperbel, Ellipse, Addition in dem gewöhnlich Sinne aufgefaßt werden (wie es, wenn man das Wesen der Sache betrachtet, allgemeine Sitte ist), und wer wird nicht lieber sagen, daß auf diese Art der Natur Gewalt angetan werde, da solche Sätze ganz und gar widerspruchsvoll sind. Denn obwohl die übliche Bezeichnung $a - b$ einen sehr guten Sinn hat, solange $a > b$ ist, so hat dieser Ausdruck keinen Sinn mehr, sobald $a < b$ ist, und man begeht den ärgsten Fehlschluß, wenn man das, was eigentlich nur in den Fällen gilt, wo das Wegzunehmende kleiner als das zu Vermindernde ist, allgemein auch auf andere Fälle ausdehnt und nachher solche Inbegriffe wie $-b$ (was nach der Definition nur hinter und in Verbindung mit Größen, die größer als b sind, einen Sinn hat) wie Zeichen von Größen behandelt.

Auf diese Art definiert sind auch die negativen Größen schon wahrhaft unmöglich, oder es gibt keine solche Größen. Und ebenso wird man, wenn man glauben sollte, bewiesen zu haben, daß sowohl zwei positive als zwei negative Faktoren ein positives Produkt ergeben, und wenn man keine Faktoren anderer Art als solche [positive oder negative Größen] zuläßt, mit Recht behaupten, daß eine Größe, deren Quadrat negativ ist, oder die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl durchaus unmöglich ist. Wenn man jedoch zu einem solchen Inbegriff von Symbolen wie $\sqrt{-1}$, denen kein Gegenstand entspricht (wie ein Bild ohne Original), gelangt, und um dem Theorem eine gewisse Allgemeinheit und Eleganz verleihen zu können, dennoch solche Inbe-

*) Diese Stelle beweist, daß die vorliegenden Aufzeichnungen aus der *Spätzeit* Johanns stammt; hiernach ist die Angabe Stäckels (*Johann B... s Theorie der imaginären Größen*, S. 267), wonach es sich um einen Entwurf der *Responsio* vom Jahre 1837 handle, zu berichtigen.

griffe beibehält und den Rechnungsregeln unterwirft, wobei $\sqrt{-1}$ nur als ein jeder weiteren Bedeutung entbehrendes Ding angesehen wird, so ist eine solche Ausflucht nicht allein für den Verstand, der immer sein Objekt anzuschauen und eine anschauliche Erkenntnis zu gewinnen strebt, durchaus unbefriedigend, sondern sie verträgt sich auch nicht mit der geometrischen Strenge; man würde auf diese Art die Würde der so nützlichen und vollkommen sicheren Wissenschaft zu einem eiteln Spielzeug machen, und ihre Ergebnisse, die auf Chimären aufgebaut sind, würden mit Recht für zweifelhaft gehalten werden. Was nützt es nämlich zu wissen oder besser, welchen Sinn hat zum Beispiel der Lehrsatz, daß man einer jeden algebraischen Gleichung durch einen solchen Wert $a + b\sqrt{-1}$ der Unbekannten genügen könne (wo a, b reelle Größen bezeichnen), solange man sich keine Vorstellung darüber bilden kann, wie das *Ding* $\sqrt{-1}$ mit der Größe b multipliziert werden kann? Und wie kann man von der Genauigkeit der gewonnenen Ergebnisse überzeugt sein, solange man bei der Herleitung Unmögliches, nicht Existierendes und Erdichtetes wie Mögliches, Existierendes und Wahres behandelt hat? Indessen ist die Metaphysik dieses ganzen Gegenstandes eine ganz andere; sie wird bald mit der höchsten Einfachheit auseinandergesetzt werden, obwohl man eine Abhilfe dieser *Bedenken* ohne Mühe auch auf folgende Art erhält. Die gewöhnlich positiv genannten Größen (damit wir, wie es notwendig ist, zu den Grundlagen zurückgehen) sind nichts anderes als die absoluten Größen selbst. Wenn nun (wobei jeder Buchstabe eine Größe bezeichnet) $a + x = c$ sein soll, wo c kleiner als a ist, so muß augenscheinlich von a etwas weggenommen werden, was jenem b, wodurch a das c übertrifft, gleich ist, und wenn man in diesem Falle das x mit $-b$ bezeichnet, sodaß $a + (-b) < a$, so ist freilich $-b$ als eine dem a homogene Größe nicht existierend. Wenn jedoch (was möglich ist) $-b$ irgendeine dem a heterogene Größe bezeichnet oder $-b$ (darunter den Inbegriff oder die Materie der Zeichen $-$ und b verstanden) eine Größe ist, zum Beispiel, wenn a, b Zeiträume (Zeiten) sind und $-a$, $-b$ Strecken und man eine Definition aufstellt, daß der Ausdruck $a + x$, solange x mit a homogen ist, die Summe von a, x (im gewöhnlichen Sinne) bezeichnet, falls aber (um den Fall $x = 0$ der Kürze halber hier zu übergehen) x dem a heterogen ist, $a + x$ bedeutet, daß a um die Größe vermindert worden ist, zu der sich x (geometrisch) so verhält wie $-a : a$, wenigstens wenn diese vierte Proportionale zu $-a, a, x$ nicht größer als a ist, sonst aber, daß x um die Größe $-a$ vermindert wird: so haben die Ausdrücke der Form $-b$ sehr wohl einen Sinn und lassen sich bei der Addition ohne Schwierigkeit behandeln, sobald irgendein b und das ihm entsprechende $-b$ gebildet oder gegeben wird. Wenn nämlich (kürzer) 1 irgendeine (feste) Größe derselben Art wie a bezeichnet, -1 aber eine willkürliche (feste) Größe, die dem x homogen ist, so bezeichnet $a + x$ a weniger $x \cdot 1$, wenn dieses $[x \cdot 1] < a$ ist, und x weniger $a \cdot -1$, wenn $x \cdot 1 > a$ ist; endlich möge im Falle der Gleichheit $a + x = 0$ sein.

Es ist erlaubt und durchaus zulässig, irgendwie Begriffe zu konstruieren (zum Beispiel ein reguläres Polyeder, das von Sechsecken eingeschlossen wird, durch irgendein Zeichen zu bezeichnen und von ihm zu sprechen), wenn man nur, nachdem die Erklärungen gegeben sind, keine falschen Schlüsse zieht. (Bei dieser Gelegenheit bemerke ich jedoch, daß man von Dingen, deren Existenz noch nicht feststeht und die sogar vielleicht gar nicht existieren, obwohl kein

augenscheinlicher (logischer) Widerspruch vorhanden ist, nur hypothetisch sprechen darf, und daß die Rede davon bei einer gründlichen Wissenschaft für unelegant, ganz nutzlos und der natürlichen Einfachheit schädlich anzusehen ist). Und alle Streitigkeiten, die in der reinen Mathematik, bisweilen sogar zwischen Männern von großem Ansehen, ausgebrochen sind, haben ihren Grund in dunkeln Begriffen. So hätten zum Beispiel Leibniz und Johann Bernoulli nicht einen so großen Streit über die Existenz der Logarithmen der negativen Zahlen geführt, wenn sie nur deutliche und klare Begriffe gehabt hätten und vor allem (nach den Vorschriften der Logik) den Gegenstand des Streites klar festgestellt hätten.

Um jedoch nicht weitschweifig zu werden, gehe ich zur tatsächlichen Darlegung unserer Gegenstände über, die durch ihre Einfachheit und Klarheit in jeder Beziehung alle möglichen Zweifel beseitigt, jeden befriedigt und sicherlich in dieser Hinsicht nichts zu wünschen übrig läßt. Die Sache läßt sich auf verschiedene Arten darlegen, die jede für sich aus den allgemeinsten Gesichtspunkten vorzubringen sich sehr lohnt, damit sie von verschiedenen Seiten erläutert wird und der wichtige Gegenstand, der trotz seiner großen Bedeutung so dunkel geblieben ist, alles wünschbare Licht erhält.

S. 181, Z. 9. Auf einem dieser Zettel findet sich folgende Äußerung, die mitgeteilt zu werden verdient:

„Ob Zeit und Raum wirklich *da seien*, oder bloß zu sein *scheinen*, muß dem verständigen und vernünftigen Denker (Philosophen) offenbar ebenso *gleichgültig* sein und außer weitere Betrachtung gesetzt werden, als es im strengsten Sinne *unentscheidbar* ist, und übrigens *diese* Ideen von der Art *scheinen*, daß sie sich auf Realitäten beziehen müssen. Es *scheint* nämlich, daß der *Anschein* (Idee) des Daseins von Zeit und Ort *richtig* sei, und *versteigen* würde man sich, wollte man darüber noch weitere Zweifel erheben. . . . Übrigens scheint der *Tastsinn* der zur Hervorbringung der Idee vom Raume einzig notwendige Sinn zu sein."

S. 181, Z. 12 v. u. — S. 182, Z. 11. Vgl. hierfür auch die Anmerkung zu S. 184.

S. 183, Z. 11—14. Vgl. etwa Borel, *Géométrie, premier et second cycles*, Paris 1905; deutsche Ausgabe von Stäckel, Leipzig 1909.

S. 184, Z. 21. Tacquet, *Elementa geometriae planae et solidae;* quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata, Antwerpen 1654.

S. 184, Z. 12—10 v. u. In entsprechender Weise sollten später auch sphärische Vielecke sowie Polyeder untersucht werden. Welche Gesichtspunkte dabei für Johann in Betracht kamen, zeigt der Titel einer geplanten Abhandlung, von der selbst nur unerhebliche Bruchstücke im Nachlasse vorhanden sind:

„Einfachster und kürzester, höchst evidenter und leicht faßlicher Beweis des höchst wichtigen Satzes, man könne 1. jedes durch Haupt- oder Axen-Linien um und um begrenzte, übrigens volle oder auch wie immer durchlöcherte, wenn nur jedes der Löcher wieder durch Haupt-Linien begrenzt wird, Stück einer jeden Hauptfläche, d. i. allerseits gleichförmigen, kurz sphärischen oder allgemeinen Kugelfläche, sei es nun eine Euklidsche Kugel oder Para- oder Hypersphäre (welch' letzterer Art auch die Ebene und jede damit parallele Fläche in der anti-Euklidschen, d. h. auf die Falschheit des XI. Euklidschen Axioms begründeten Raumlehre ist) in lauter Haupt- (d. i. durch Haupt-Linien

derselben Fläche begrenzte) Dreiecke; 2. jeden beliebigen vollen oder durchlöcherten, wie auch mit Höhlungen versehenen Ebenen- (d. i. von Ebenen allerseits begrenzten) Raum in lauter dreiseitige Pyramiden, und zwar dergestalt zerlegen, daß dort, nämlich in 1., entweder mit jedem Schnitte sogleich eine solche vom Ganzen ein Hauptdreieck abschneidende Hauptlinie gezogen werde oder zuerst nur eine in der Hauptfläche *A* liegende derlei und erst dann durch Ziehung jeder folgenden Hauptlinie von einem Scheitel zu einem andern ein Dreieck abgeschnitten werde, bis auf solche Art einmal *A* selbst ganz in lauter derlei Dreiecke zerteilt wird."

S. 187, Z. 10—16. Vgl. die Einleitung zu Lobatschefskijs Abhandlung *Géométrie imaginaire,* Journal f. d. r. u. a. Mathematik, 17 (1837), S. 295.

S. 189, Z. 17. Für Gauss sei auf den Bericht über *Gauss als Geometer* verwiesen, den der in Vorbereitung befindliche Bd. X der Werke bringen soll. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen,* Habilitationsvortrag, Göttingen 1854, Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 13 (1867), Werke, 1. Aufl., S. 254, 2. Aufl., S. 272.

S. 187, Z. 24. Cayley, *A sixth memoir upon quantics*, London, Philosophical Tranactions 149 (1859), abgedruckt Papers, vol. 2 (1889), S. 561.

S. 187, Z. 27. F. Klein, *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie,* Math. Annalen 4 (1871), S. 573—625, 6 (1873), S. 112—145, 7 (1874), S. 531—537; vgl. F. Klein, *Nicht-Euklidische Geometrie,* Vorlesungen gehalten 1889—90 an der Universität Göttingen, Göttingen 1893 (Autographiert).

S. 187, Z. 12—5 v. u. Vgl. die kritischen Bemerkungen von F. Klein, *Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anläßlich der ersten Verteilung des Lobatschefskij-Preises*, Math. Annalen 50 (1898), S. 583—600. Es ist bemerkenswert, aber, wie es scheint, bis jetzt unbeachtet geblieben, daß schon Lobatschefskij die Schwierigkeiten, die sich bei der Auffassung des Raumes als eines Zahlenkontinuums ergeben, klar erkannt hat. Er sagt in den *Neuen Anfangsgründen* vom Jahre 1835 (Engel, S. 79): „Gewöhnlich beginnt man die Geometrie, indem man den Körpern drei Ausdehnungen beilegt, den Flächen zwei, den Linien eine, während man beim Punkte gar keine zuläßt. Indem man die drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe nennt, und unter diesen Benennungen eigentlich die drei Koordinaten versteht, beeilt man sich auf diese Weise verfrühte Begriffe durch Worte mitzuteilen, denen die gesprochene Sprache bereits einen gewissen, für die strenge Wissenschaft freilich noch unbestimmten Sinn beilegt. In der Tat, wie ist es möglich, sich die Ausmessung der Länge klar vorzustellen, wenn wir noch nicht wissen, was eigentlich eine gerade Linie ist? Wie kann man von Breite und Höhe reden, ohne vorher etwas über Lote, über die Ebene und darüber gesagt zu haben, wie sich die Lote in einer und in verschiedenen Ebenen verhalten? Wenn endlich der Punkt gar keine Ausdehnung hat, was bleibt dann von ihm übrig, damit er Gegenstand eines Schlusses sein könne? Mag es auch sein, daß sich jeder die gerade Linie klar vorstellt, obwohl er sich von ihrem Begriffe keine Rechenschaft geben kann; aber es fragt sich, auf welche Weise er nunmehr mit Hilfe der geraden Linie bei einer krummen Linie eine Ausdehnung bestimmen soll und bei einer krummen Oberfläche deren zwei." Für die weiteren Ausführungen muß auf die *Neuen Anfangsgründe* selbst verwiesen werden.

S. 188, Z. 2. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig 1899, 1. Aufl., Leipzig 1913; Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig 1882, zweite Aufl., 1912; Peano, *Sui fondamenti di geometria*, Rivista di matematica 4 (1894), S. 51—99; Schur, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1909; Veronese, *Fondamenti di geometria*, Padua 1891; vgl. auch Vahlen, *Abstrakte Geometrie*, Leipzig 1905.

S. 188, Z. 12—14. *Tentamen*, t. II, S. 195, Editio secunda, S. 241.

S. 188, Z. 6—4 v. u. Gauss, Werke, Bd. VIII, S. 244.

S. 188, Z. 3—1 v. u. Bricard, *Sur une question de géométrie rélative aux polyèdres*, Nouv. Ann. (3) 15 (1896), S. 331—334; Sforza, *Un' osservazione sull' equivalenza dei poliedri per congruenza delle parti*, Periodico di matematica 12 (1897), S. 105—109; Dehn, *Über raumgleiche Polyeder*, Göttinger Nachrichten 1900, S. 345—354; *Über den Rauminhalt*, Math. Annalen 55 (1901), S. 465—478.

Zum XIX. Kapitel

S. 189, Z. 17. Ein Entwurf dieser Bittschrift vom 3. Mai 1832 ist abgedruckt S. 229—232 in der Anmerkung zu S. 73, Z. 1.

S. 189, Z. 20—22. Vgl. eine Äußerung Johanns über den Einfluß des Vaters auf sein ganzes Leben, die sich in der Einleitung seiner *Bemerkungen zu Lobatschefskijs Geometrischen Untersuchungen* findet. „Von meinem Vater gewann ich, neben wahren moralischen Prinzipien und Arbeitung, was ich am höchsten schätze, zugleich mit vielen tüchtigen Grundideen ein reges Interesse, nach gründlichen, strengen, wahrheitsgetreuen und zugleich schönen Lehren zu streben. Er war es auch, der meinen Geschmack bildete und mir Ziel und Richtung gab, an dem ich immer unerschütterlich festhielt, sodaß in mir schon in meinen Kinder- und Jünglingsjahren ein reines und edles Streben erwachte. Mit einem Wort, ihm verdanke ich geistig und materiell die Grundlage und einen großen Teil meines Wesens. ... Da er mir auf jeden Fall in vielem vorausgegangen ist, so läßt sich unser Verhältnis demjenigen zwischen Äsop und Phaedrus mit entsprechender Abänderung vergleichen: *Pater auctor quam materiam reperit, hanc ego polivi versibus senariis*, das heißt, die Stoffe, die mein Vater gefunden hat, habe ich in sechsfüßigen Versen ausgearbeitet, und es kommt nämlich auch dieser Versifikation eine eigene Bedeutung zu."

Neben Wolfgang hat auf Johanns Allheillehre vielleicht auch ein Werk Einfluß gehabt, das sich in seinem Nachlaß befindet: v. Eckartshausen, *Zahlenlehre der Natur*, oder: Die Natur zählt und spricht; was sind ihre Zahlen? was sind ihre Worte? Ein Schlüssel zu den Hieroglyphen der Natur, Leipzig 1794. Wann dies Werk in Johanns Besitz gekommen ist, hat sich nicht feststellen lassen; es ist nicht ausgeschlossen, daß Wolfgang es 1799 aus Deutschland mitgebracht hat.

S. 191, Z. 6—7. Johann Bolyai sagt, daß der Ausspruch: „Der Kopf muß das Herz bilden" oder auch, wie es an anderen Stellen heißt: „Der Verstand muß das Herz erziehen" von Schiller herrühre. Es ist mir nicht gelungen, einen solchen Ausspruch bei Schiller aufzufinden.

S. 193, Z. 4 v. u. — S. 194, Z. 11. *Tentamen*, Editio secundo, S. 413, 414.

S. 194, Z. 15—11 v. u. Sehr bezeichnend für diese Eigentümlichkeit Johanns sind die Entwürfe zu Titelblättern der Allheillehre, von denen sich mehr als ein Dutzend in seinem Nachlaß finden. Einer davon soll hier vollständig mitgeteilt werden.

All-Heil-Lehre

Zur allgemeinen Wohlfahrt oder Glückseligkeit oder Heile oder Vollkommenheit.

Für den Liebhaber

Von

Johann Bolyai v. Bolya,

des kaiserlich königlichen österreichischen Ingenieur-Corps

Hauptmann zweiter Klasse in Pension.

Der Kopf muß das Herz bilden. Schiller.

Zeitliche All-Heil-Lehre

Zur Vollkommenen derlei

Mit All-Heil-Leit-Lehre dazu.

Das ist

All-Heil-Lehre

in drei, voneinander getrennten, selbständigen und deshalb hier, durch einen einfachen Kunstgriff, auch mit einem Male in jeder beliebigen der sechs möglichen Ordnungen dargestellten oder dargebotenen oder vorgelegten solche Hauptteile zerfallend oder sich teilend, wovon die zeitliche All-Heil-Lehre und Leit-Lehre, besonders letztere, in gegenwärtiger oder vorliegender oder -stehender Gestalt, und zum Teile auch in Betreff des Wesens mit der — hiermit ebenfalls abgesondert erscheinenden — oder mit dem Buch-Rücken-Titel sechs ersten Titeln der vollkommenen All-Heil-Lehre — somit auch samt dem Namen der Wenigkeit des Verfassers — nur zeitlich wegen der Unvollkommenheit und bis zur völligen Ausbildung oder Vervollkommnung der bisherigen menschlichen oder irdischen Sprachen, Wissenschaften und (Lebens-)Umstände oder Verhältnisse und sehr bedeutenden Beförderung der Wohlfahrt der jetzigen Generation auf dem hier alleruntertänigst und allerunvorgreiflichst vorzuschlagen gewagten Wege oder Art oder Weise notwendig, nützlich und heilsam sind. Für den Liebhaber mit dem sehnlichsten, heißesten, innigsten Wunsche und demselben angemessenen, vernünftigen, also festen Glauben und gegründeten Hoffnung gemäß jedoch oder indessen wenigstens mittelbar zum Besten (des Dienstes) oder zur möglichsten und in geringen Kräften stehenden Beförderung des Allerhöchsten Dienstes oder, was hiermit einerlei ist, Mittel und zwar einziges, zur tunlichsten und auch zu der — bis itzt auf der Erde für unmöglich gehaltenen oder angezweifelten — und zwar sogleich oder ungesäumt und schnell bewirkt werden könnenden gänzlichen oder vollständigen Herbeiführung des allgemeinen, teilweisen und indi[viduellen Heiles].

Zeitlicher Buch-, Umschlag- oder Couvert-Titel

zu einem nur zeitlich- oder einstweilig- oder provisorischen oder Interims- oder interimistischen, nämlich sprachgemäßen, und dem jetzigen oder dermalig- oder heutigen Zustande oder Höhe oder Stadium der Wissenschaften überhaupt zeitgemäßen oder den Umständen und Verhältnissen auf der Erde, wenigstens meines Wissens oder wie ich weiß, angemessenen *Umschlags-*, das ist denn — ohne dieses eingebunden werdenden — Buches oder dem Buch samt Einband

doch nur zum Umschlage oder Decke oder Deckel oder Bedeckung oder Hülle oder Einhüllung oder Einwicklung oder Wickler- oder Mantel- oder Über- oder Schlafrock- oder sonst derlei Oberkleid- oder Bekleidungs-artigen oder sterblichem Überreste oder Vor- oder Bei- oder Neben- oder Über- oder Ober- oder Leitlehre oder An- oder Einleitung oder Ankündigung oder Vorbereitung oder Eingang oder vorläufig- oder voran- oder vorhergehenden oder vorausgeschickten Anmerkung oder Beilage oder Makulare oder Makulatur oder Krusten- oder Schlacken- oder Häfen- oder Abfall- oder Auswurst-Artigen oder — bei aller einzigen Großartigkeit oder Kolossalität — sonst derlei, seiner Zeit von selbst wegfallenden und dadurch vollkommen Geläutertes oder Destilliertes zurücklassenden rauh- oder gröberen oder unedleren Teiles bestimmten oder dienen mögenden Bogen Papieres oder Papierbogens:

Lehre und Mittel
zum Besten oder Bestmöglichen oder Möglichst Gutem,

ja vollkommenen, vollständigen, zeitlichen sowohl als ewigem, und in jedem zeitlichen Leben zwar freilich oder allerdings (auch) nur endlichem, mit der Zeit aber unendlich wachsendem

Wohle oder Wohlfahrt oder Heile oder Glückseligkeit,

somit All-Bestem, All-Wohle und All-, und Ewig- und Schnell-Heile oder Heile oder (somit ganzen) Welt oder Welt-Alles und seiner Zeit eines jeden Lebenden als jedesmal nach seiner ebendermaligen Einsicht, Umständen, Verhältnissen und Wirkungskreise Haupt-, End-, Selbst- — das ist nur seiner selbst wegen, nicht mehr um irgendeines höheren Zweckes Willen gefolgten — Ewig-Gewinn wirklichen, natürlichen und notwendigen höchsten Zweck eines jeden Individuums.

Von
Johann Bolyai
Wien
1852
(Exemplar-Zahl)
Vollkommen —

somit auch in vollkommen oder ganz oder gehörig oder völlig oder durchaus oder durchgehends oder gründlich ausgebildeten oder vervollkommneten oder be- und ausgearbeiteten oder zur Vollkommenheit gebrachten oder erhobenen oder gelangten oder gediehenen Sprache verfaßten oder auch in Rücksicht der Sprache oder des Ausdrucks oder Vortrages oder Verfassung oder Darstellung sowie des Körpers oder Gestalt oder Äußeren oder Ausstattung oder Kleides oder Einkleidung oder Einrichtung oder Veranstaltung oder Materiellen überhaupt und vollkommen wohl(an)geordnete oder hauptzweckmäßig systematische, kurz in jeder Hinsicht vollkommenen, vollständigen oder alle heilsamen Lehren, und zwar in einem einzigen Werke von oder bestehend aus nur einigen wenigen Bänden umfassende oder enthaltende und zum All-Heile oder Haupt- und Gemein-Zwecke zureichende, sowie auch die Erden-Bewohner und zwar (zunächst oder unmittelbar oder geradezu oder im besonderen) die ganze Menschheit oder die Menschen oder das Menschen- oder menschliche Geschlecht oder Gesellschaft oder die unseren oder diesen Irr-Stern oder Planeten bewohnenden Personen oder Vernunft- oder vernünftigen Wesen samt den in ihrem oder derselben Bereiche oder Wirkungs-Kreise befindlichen oder ihr untergeordneten

oder ihr anvertrauten (noch) unvernünftigen Lebenden oder Lebens-Gefährten; und zwar allem Verhoffen oder Erwartung nach nunmehr sogleich auch schon hinnieden oder auf der Erde oder in diesem oder irdischen oder Erden-Leben und zwar auch schon die Zeitgenossen oder jetzt oder dermal Lebenden in sehr vielen oder bedeutenden und schnellest (beschleunigst) wachsenden, den hiernach oder von uns an geboren werdenden Menschen aber (auch zwar selbst) in jeder Hinsicht beglückende und heilbringende oder verschaffende

Heil-Lehre und Heil-Mittel
mit zeitlicher derlei
und Heil-Leit-Lehre zur Letzteren.
Erster Band
(Buch folgt).

S. 195, Z. 17—20. Bedőházi, S. 400.

Zum XX. Kapitel

S. 196, Z. 8—10. Über Kreil vgl. S. 163 und die zugehörige Anmerkung.

S. 196, Z. 10—13. *Br. G.-B.*, S. 143—146.

S. 196, Z. 13 v. u. — S. 197, Z. 9. Aus der Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856).

S. 197, Z. 11—35. Aus der Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* (1856).

S. 197, Z. 17—16 v. u. Diese Erklärung der Geraden als der Linie, „welche sich in sich selbst dreht" hat Gauss in seinen Vorlesungen gegeben. Lübsen berichtet in seinem *Lehrbuch der Elementar-Geometrie*, Hamburg 1851, S. 11: „Eine gerade Linie ist diejenige, welche nicht aus ihrer Lage kommt, indem sie sich um ihre beiden festen Endpunkte dreht. So hörten wir einmal Gauss bei der Erklärung des Fernrohrs und dessen richtigem Gebrauch den Begriff der geraden Linie festsetzen. Diese Erklärung ist theoretisch fruchtbar, wie die gleich daraus folgenden Sätze zeigen; außerdem ist das angegebene Merkmal praktisch wichtig, z. B. bei der Justierung eines Fernrohrs, richtiger Bohrung eines Zylinders usw." Lübsen hatte im Jahre 1830 bei Gauss Vorlesungen gehört; vgl. sein *Lehrbuch der Analysis*. Hamburg 1853, S. 171. Siehe auch Gauss, Werke VIII, 1900, S. 196 und 199.

S. 197, Z. 3—1 v. u. Vgl. Gauss, Werke VIII, Abschnitt *Grundlagen der Geometrie* (S. 159—268) sowie den in Vorbereitung befindlichen Bericht über *Gauss als Geometer*, Bd. X der Werke.

S. 198, Z. 6—16. Sartorius v. Waltershausen, *Gauss zum Gedächtnis*, S. 81; die Stelle ist in den Werken von Gauss abgedruckt, Bd. VIII, S. 267.

S. 198, Z. 19—28. Die betreffenden Briefe sind abgedruckt in den Werken von Gauss, Bd. VIII, S. 210—219 (1831), 238—239 (1846) und im Briefwechsel Gauss-Bolyai, S. 198—199 (1849).

S. 198, Z. 2 v. u.—S. 197, Z. 1. In der Vorrede zum ersten Bande der ersten Auflage *der Elemente der Mathematik* vom Jahre 1860 sagt Baltzer (S. VI), besondere Mühe habe die Auffindung der geschichtlichen Nachweise gemacht, die er den einzelnen Sätzen und Problemen hinzuzufügen wünschte; man werde mancherlei wissenswerte und wenig bekannte Notizen angemerkt finden. Ohne Zweifel liegt hierin eine Eigentümlichkeit der Baltzerschen *Elemente*, die sie noch heute zu einem wertvollen Hilfsmittel bei geschicht-

lichen Forschungen macht. Bei der Lehre von den Parallelen wird im zweiten Bande der *Elemente* vom Jahre 1862 (S. 11) bemerkt: „Die älteste auf ein besonderes Axiom gegründete Theorie der Parallelen findet man bei Euclid. I, 27—31“, und es wird darauf (S. 12) der Versuch unternommen, nach dem Vorbild von Bertrand (*Développement*, Genf 1788, II. S. 19) die Parallelentheorie durch die Betrachtung von unendlichen Flächenstreifen ohne ein besonderes Axiom aufzubauen.

S. 199, Z. 1—18. In der 2. Auflage der *Elemente* Baltzers heißt es im zweiten Teile, S. 12—13, Planimetrie, § 2, Nr. 7:

„Durch einen Punkt (Scheitel) gehen unendlich viele Schenkel, die einen gegebenen Schenkel schneiden, und unendlich viele Schenkel, die den gegebenen Schenkel nicht schneiden. Der erste Schenkel CD [Fig. 26], welcher den Schenkel AB nicht schneidet, während alle in dem Winkel ACD enthaltenen Schenkel den Schenkel AB schneiden, heißt *parallel* (*παρ-αλληλος*) mit AB. Von der Parallele CD wird gesagt, daß sie mit AB einerlei Richtung hat und einen verschwindenden Winkel bildet, dessen Scheitel unendlich fern ist, daß sie nach dem unendlich fernen Punkt geht, der in der Richtung von A nach B zu verfolgen ist. Dabei kann EB oder FB für AB gesetzt werden, wenn EB und FB mit AB einerlei Richtung haben, in Betracht, daß auch alle in dem Winkel ECD oder FCD enthaltenen Schenkel den Schenkel EB oder FB schneiden.“

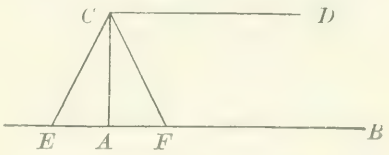


Fig. 26.

In einer Anmerkung wird hinzugesetzt:

„Nach Euclides nannte man zwei sich nicht schneidende Gerade einer Ebene parallel, und fügte dieser Erklärung das Axiom (oder ein Äquivalent desselben) hinzu, daß auf einer Ebene durch einen Punkt nur eine Gerade gezogen werden könne, die eine auf der Ebene gegebene Gerade nicht schneidet. Legendres Meinung (*Geom.* note 2), daß ein solches Axiom seine Begründung durch Untersuchungen über die Natur der Geraden erhalten werde, hat sich nicht bewährt. Die obige genauere Definition der Parallelen ist zuerst von Lobatschewsky (*Geom. Untersuchungen*. Berlin 1840) und J. Bolyai (*Appendix* zu dem Werke W. Bolyais *Tentamen in elementa matheseos etc.*, Maros Vasarhely 1832) gegeben worden. Den unendlich fernen gemeinschaftlichen Punkt von Parallelen haben Desargues (1630) und Newton (1687) erwähnt.“

Ferner kommt in Betracht Nr. 8 desselben § 2, wo es heißt:

„Die genauesten Messungen haben ohne Ausnahme zu erkennen gegeben, daß bei einem Dreieck die Summe der Winkel 180^0 beträgt; darnach beträgt bei Parallelen die Summe der inneren Winkel 180^0, und die Schenkel AB, CD [Fig. 26] konvergieren gegen einen in endlicher Ferne liegenden Punkt, wenn $BAC + ACD < 180^0$ (Eucl. I, *Axioma* 11). Alle Versuche, diesen Satz zu beweisen, mußten scheitern, weil an sich auch die entgegengesetzte Hypothese zulässig ist, daß bei einem Dreieck die Summe der Winkel und demnach auch bei Parallelen die Summe der inneren Winkel weniger als 180^0 betragen könnte.“

„Die unserer Erfahrung entsprechende Geometrie, welche in dem Folgenden entwickelt wird, heißt die *gemeine, Euclideische* Geometrie. Auf der gegenüberstehenden Hypothese kann eine *abstrakte, Nicht-Euclideische* Geometrie

(imaginäre, Pangeometrie) erbaut werden, in der verschwindend kleine Figuren den Gesetzen der gemeinen Geometrie unterliegen, die auch in gewissen Lehren mit der gemeinen Geometrie unbedingt übereinstimmt, übrigens aber eine durch Erfahrung zu bestimmende Konstante erfordert."

„Nach der Annahme der abstrakten Geometrie gehn durch einen Punkt A [Fig. 13, S. 199] zwei verschiedene Gerade AD und AF, die mit den entgegengesetzten Schenkeln BC und BE einer Geraden parallel sind. Es sei AB normal zu CE, AD mit BC parallel, $EBAF$ mit $CBAD$ kongruent, so ist auch AF mit BE parallel. Nach der Annahme der gemeinen Geometrie ist der Winkel BAD recht, mithin fallen die Geraden AD und AF zusammen; die in entgegengesetzten Richtungen liegenden unendlich fernen Punkte einer Geraden werden nicht unterschieden, jeder Geraden wird nur ein unendlich ferner Punkt zugeschrieben, weil auf einer Ebene durch einen neben einer Geraden gelegenen Punkt nicht mehr als eine Gerade gezogen werden kann, welche die Gerade nicht schneidet."

„Diese fundamentale Unterscheidung ist zuerst von Gauss (seit 1792) erkannt, aber nicht ausführlich mitgeteilt worden. Andeutungen darüber findet man in Gauss' Anzeigen von Schwab, *Commentatio in primum elementorum Euclidis librum* und Metternich, *Theorie der Parallellinien*, Gött. gel. Anz. 1816, p. 617 und von C. R. Müller, *Theorie der Parallelen*, Gött. gel. Anz. 1822, p. 1725. Weiteres in Gauss' Briefen an Schumacher (seit 1831) II, p. 268 und 431, V, p. 246. Vgl. Sartorius v. Waltershausen, *Gauss zum Gedächtnis*, p. 81. Die wirklichen Gründer einer korrekten Parallelentheorie und der abstrakten Geometrie sind J. Bolyai (vgl. 7) und Lobatschefsky, *Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallelen* im Kasanschen Boten 1829 und in den Gelehrten Schriften der Universität Kasan 1836—38, *Géométrie imaginaire* 1837 (in Crelles Journal 17, p. 295), *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellen*, Berlin 1840, *Pangéométrie*, Kasan 1855."

S. 199, Z. 24—27. *Études géométriques sur la théorie des parallèles, par N. I. Lobatchebsky*, traduit de l'allemand par J. Hoüel, suivi d'un extrait de la corrspondance de Gauss et Schumacher, Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, t. 4 (1866), S. 83—128; auch als selbständiges Werkchen, Paris, Gauthier-Villars 1866 erschienen.

S. 199, Z. 27—29. *La science absolue de l'espace* par Jean Bolyai, précédé d'une Notice sur la vie et les travaux de W. et J. Bolyai par M. Fr. Schmidt, Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, t. 5 (1867), S. 189—248; auch als selbständiges Werkchen erschienen, Paris, Gauthier-Villars 1868. Das Buch enthält (S. 7—21) eine Übersetzung der biographischen Skizze von Schmidt, (S. 22—57) des *Appendix* und (S. 58—64) der auf die absolute Geometrie bezügliche Stellen aus dem *Tentamen* und dem *Kurzen Grundriß*.

S. 199, Z. 12 v. u. Eine ausführliche Schilderung der unermüdlichen Tätigkeit, die Franz Schmidt der Sache der beiden Bolyai gewidmet hat, findet man in dem Nachruf von P. Stäckel, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 11 (1902), S. 141—146.

S. 200, Z. 9—11. Siehe Seite 70 des Textes.

S. 200, Z. 16—27. Siehe das Verzeichnis von Schriften, die sich auf Wolfgang und Johann Bolyai beziehen, S. 207, unter Schmidt.

S. 200, Z. 14—13 v. u. A. Forti, *Nota intorno alla vita ed agli scritti di Wolfgang e Giovanni Bolyai di Bolya, matematici ungheresi*. Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni, 1 (1868), S. 277—299.

S. 200, Z. 13—11 v. u. G. Bolyai, *Sulla scienza dello spacio assolutamente vera*. Versione dal latino di G. Battaglini, Giornale di matematiche, 6 (1868), S. 97—116.

S. 201, Z. 3—5. Fr. Schmidt, *Mitteilungen über Johann Bolyai*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4 (1894/95), 1897, S. 107—109.

S. 201, Z. 11—14. Fr. Schmidt, *Lebensgeschichte des ungarischen Mathematikers Johann Bolyai de Bolya, k. k. Hauptmann im Geniecorps*, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft VIII, (1898), S. 133—146.

S. 201, Z. 14—18. *Br. G.-B., Notizen über Gauss und Bolyais Leben und Werke*, S. 175—185.

S. 201, Z. 18—20. Schering, Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 22 (1877); vgl. *Br. G.-B.*, S. 167—169.

S. 201, Z. 20—22. Vgl. *Br. G.-B.*, S. 163.

S. 201, Z. 19—11 v. u. *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai*, mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von Franz Schmidt und Paul Stäckel, Leipzig 1899.

S. 202, Z. 13—9 v. u. *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*, bearbeitet von J. Frischauf, Leipzig 1872, XII u. 96 S. *Elemente der absoluten Geometrie* von J. Frischauf, Leipzig 1876, VI u. 142 S.

Außer Frischauf sind noch zu nennen:

H. Wagner, *Lehrbuch der ebenen Geometrie, nach Grundsätzen Bolyais*, Hamburg 1874. In der zweiten „völlig umgearbeiteten" Auflage, Hamburg 1893, hat der Verfasser die Beziehung zur absoluten Geometrie fallen lassen, „weil bei dem Bestreben, die Anforderungen an die Schüler herabzusetzen, kein Lehrgang mehr möglich ist, bei dem das Hauptgewicht auf die wissenschaftliche Begründung und Konsequenz gelegt wird".

C. Spitz, *Die ersten Sätze vom Dreiecke und die Parallelen*, nach Bolyais Grundsätzen bearbeitet, Leipzig und Heidelberg 1875. Das Werkchen bringt an absoluter Geometrie nicht mehr als den § 1 des *Appendix*.

M. Simon, *Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie*, Straßburg 1890. Seit dem Jahre 1890 hat Simon eine Reihe von Abhandlungen zur absoluten Geometrie veröffentlicht, in denen besonders die elementaren Konstruktionen ausgebaut worden sind.

S. 202, Z. 5—3 v. u. *The Science Absolute of Space by John Bolyai*, transleated from the Latin by Dr. George Bruce Halsted, first edition, Austin, Texas, U. S. A., 1891, fourth edition 1896. Das Buch beginnt mit einer geschichtlichen Einleitung (S. I—XXX). Es folgt die Übersetzung des *Appendix* (S. 1—48) und von Stellen aus dem *Tentamen* und dem *Kurzen Grundriß* (S. 49—58). Den Schluß bilden Bemerkungen des Übersetzers über das Licht, das die nichteuklidische Geometrie auf den Unterricht in der elementaren Geometrie wirft (S. 59—71). Im Jahre 1896 hat Halsted das Kollegium in Maros-Vásárhely besucht.

S. 203, Z. 3—4. Die Übersetzung des *Appendix* von Josef Sutták ist unter dem Titel: *A tér absolut igaz tudománya* (Die absolut wahre Raumwissen-

schaft) als selbständiges Werk 1897 zu Budapest erschienen. Als Einleitung bringt Sutáк (S. III—XIX) geschichtliche Bemerkungen über die Parallelentheorie und im besonderen über Wolfgang und Johann Bolyais Untersuchungen in betreff der Grundlagen der Geometrie. Es folgt (S. XX—XXVIII) eine Biographie Johann Bolyais von Franz Schmidt, die im wesentlichen mit der S. 201 erwähnten Biographie in deutscher Sprache übereinstimmt (vgl. die Anmerkung S. 265). Der Übersetzung (S. 1—72) sind zahlreiche Erläuterungen beigefügt (S. 73—143).

S. 203, Z. 3—4. Die Übersetzung des *Appendix* von Ignaz Rados ist unter dem Titel: *A térnek absolut igaz tudománya* (Die absolut wahre Wissenschaft vom Raume) in den Mathematikai és physikai Lapok (Mathematischen und physikalischen Blättern), Bd. 6 (1897), S. 147—192 erschienen.

S. 203, Z. 9—10. K. Szily, *Adatok Bolyai Farkas életrajzához* (Daten zur Biographie Wolfgang Bolyais), Értekézesek a mathematikai tudományok köréből (Abhandlungen aus dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften), Bd. 11, Heft 9, Budapest 1884.

S. 203, Z. 10—12. S. Brassai, *Emlékbeszéd Bolyai Farkas felett* (Gedächtnisrede auf Wolfgang Bolyai), Erdélyi Muzeum, Bd. 3, 1886.

S. 203, Z. 12—17. J. Koncz, *A Maros-Vásárhelyi ev. ref. kollegium története* (Geschichte des ev. ref. Kollegiums zu Maros-Vásárhely), Maros-Vásárhely 1886—1896, S. 271—338 (1887).

S. 203, Z. 15—5 v. u. J. Bedőházi, *A két Bolyai* (Die beiden Bolyai), Maros-Vásárhely 1897. 454 S.

S. 203, Z. 2 v. u.—S. 204, Z. 14. Einen Bericht über die Gedenkfeier am 15. Januar 1903 enthalten die *Acta universitatis literarum regiae hungaricae Francisco-Josephinae Kolozsvariensis* Anni MCMII—III, Fasciculus II, Klausenburg 1903. Im besonderen ist hier Schlesingers *Emlékbeszéd* (*Festrede*) abgedruckt, die auch deutsch im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 12 (1903), S. 165—194 erschienen ist. Ferner finden sich hier in magyarischer Übersetzung die Abhandlungen, die Schlesinger und Stäckel zur Festschrift (siehe die folgende Anmerkung) beigesteuert hatten.

S. 204, Z. 1—10. Der Bolyai-Preis besteht in einer Erinnerungsmünze und der Summe von 10000 Kronen. Für die im Dezember vorzunehmende Erteilung des Preises wird jedesmal im vorhergehenden März von der dritten (naturwissenschaftlichen) Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften ein Ausschuß gebildet, dem zwei ungarische und zwei auswärtige Mitglieder der Akademie angehören. Er entscheidet im Oktober, wer den Preis erhalten soll. Das Gutachten des Berichterstatters, den der Ausschuß aus seiner Mitte ernennt, wird in der Dezember-Sitzung verlesen und in den Verhandlungen der Akademie veröffentlicht.

Der Stiftung des Bolyai-Preises war im Jahre 1895 die Stiftung eines Lobatschefskij-Preises durch die Physiko-mathematische Gesellschaft der Universität Kasan vorangegangen. Der Preis wird in der Höhe von 500 Rubeln seit dem Jahre 1897 alle drei Jahre an Lobatschefskijs Geburtstag, dem 22. Oktober (alten Stils), verliehen. Er ist für Werke über Geometrie, in erster Linie für solche über nichteuklidische Geometrie bestimmt, die innerhalb der sechs der Verteilung des Preises vorhergehenden Jahre gedruckt oder überhaupt noch nicht veröffentlicht sind; die Bewerbungsschriften müssen spätestens ein Jahr vor der Verleihung des Preises der Physiko-mathematischen Gesellschaft

zugestellt sein. Der Bericht des Ausschusses und die Gutachten der Berichterstatter werden im *Bulletin de la société physico-mathématique de Kasan* abgedruckt. Den ersten Preis im Jahre 1897 hat Sophus Lie für die geometrischen Untersuchungen im dritten Bande seines Werkes über *Transformationsgruppen* (Leipzig 1893) erhalten.

S. 204, Z. 10—12. *Libellus, post saeculum quam Iohannes Bolyai de Bolya anno MDCCCII a. d. XVIII kalendas ianuarias Claudiopoli natus est, ad celebrandam memoriam eius immortalem ex consilio ordinis mathematicorum et naturae scrutatorum regiae litterarum universitatis hungaricae Francisco-Josephinae Claudiopolitanae editus.* Claudiopoli MCMII. Die Festschrift enthält zunächst eine lateinische Übersetzung des Briefes von Johann an Wolfgang vom 3. Nov. 1823; eine Nachbildung des Briefes ist beigegeben. Dann folgen die Abhandlungen: Schlesinger, *de nonnullis absolutae geometriae ad theoriam complexae variablis functionum applicationibus* (S. 1—60), Stäckel, *de ea mechanicae analyticae parte, quae ad varietates complurium dimensionum spectat* (S. 61—79), Bonola, *index operum ad geometriam absolutam spectantium* (S. 81—154); nachdem Stäckel, *Th. d. P.* S. 287—318 die Literatur von 1482 bis 1837 zusammengestellt hatte, hat Bonola dasselbe für den Zeitraum von 1838 bis 1902 geleistet.

S. 204, Z. 12—14. Vgl. Schlesinger, *Bolyai János szülőházáról* (Über Johann Bolyais Geburtshaus), Math. és Phys. Lapok 12 (1902), S. 53—56; dieser Aufsatz ist ein dem damaligen Bolyai-Ausschuß der math.-nat. Fakultät zu Klausenburg erstatteter Bericht.

S. 204, Z. 13—14. Der Text der Gedächtnistafel lautet in getreuer deutscher Übersetzung: „Am 15. Tage des 12. Monats des Jahres 1802 wurde hier geboren Johann Bolyai v. Bolya, der ungarische Euklides, der Sohn Wolfgang Bolyais v. Bolya, des gedankentiefen Verfassers des Tentamens. Zum Gedächtnis hat die mathematische und naturwissenschaftliche Fakultät der Klausenburger Franz-Josephs-Universität nach hundert Jahren diesen Stein errichtet."

S. 204, Z. 20—24. Ein Bericht über diese Bolyai-Gedächtnisfeier ist vom ev. ref. Kollegium zu Maros-Vásárhely unter dem Titel *Bolyai János Emlékezete* herausgegeben worden; ihm ist eine Nachbildung des Briefes von Johann Bolyai an seinen Vater vom 3. November 1823 beigegeben.

In Maros-Vásárhely ist auf dem Platze, wo sich das neue Rathaus befindet, in den Jahren 1912 und 1913 ein sogenannter Kulturpalast aufgeführt worden, d. h. ein Gebäude mit Räumen für ein Museum und eine Bibliothek, mit einem Konzertsaal usw. Als bildhauerischer Schmuck der Außenwände dienen die Bildnisse von berühmten Männern der Stadt, darunter auch von Wolfgang und von Johann Bolyai; das Bildnis Johanns ist freilich nicht als authentisch anzusehen. Von den Reliefs, mit denen die Außenwände geschmückt sind, zeigt das eine Wolfgang Bolyai auf dem Katheder; zu seinen Füßen sitzen die Schüler, neben ihm steht ein Knabe, mit nach ihm gewendeten Blick, dem Wolfgang etwas zu erklären scheint: dieser soll Johann vorstellen.

Nachweis der Stellen aus Johann Bolyais Nachlaß, die im ersten Teile abgedruckt sind[1]

Lateinische Prüfungsarbeit aus dem Jahre 1817.

S. 226, Z. 16—1 v. u.

Aufzeichnung in einem Übungshefte aus dem Jahre 1820.

S. 83, Z. 5—14. Ältestes Zeugnis für Johanns Beschäftigung mit der absoluten Geometrie. Nachbildung an der Spitze des Buches.

Zettel aus der Zeit um 1820.

S. 234, Z. 7—3 v. u. Dreiteilung des Winkels mittels der gleichseitigen Hyperbel.

Aus einem Brief vom 3. November 1823 an Wolfgang Bolyai.

S. 85, Z. 16 v. u.—S. 86, Z. 2. Entdeckung der absoluten Geometrie.

S. 237, Z. 14—5 v. u. Lateinische Übersetzung der betreffenden Stelle.

Zettel aus dem Jahre 1830.

S. 132, Z. 6 v. u.—S. 133, Z. 5. Größensysteme mit 6 Einheiten.

Zettel aus dem Jahre 1832.

S. 238, Z. 6—16. Wolfgang vermag die, absolute Geometrie nicht zu würdigen; Wichtigkeit der vollkommenen Raumlehre.

Zwei Zettel aus dem Jahre 1832.

S. 110, Z. 6—S. 111, Z. 11. Erste Methode zur Kubierung des Tetraeders.

S. 111, Z. 12—S. 112, Z. 1 v. u., S. 242, Z. 22—25. Hilfsatz zur ersten Methode der Kubierung des Tetraeders.

S. 113, Z. 6—4 v. u., S. 114, Z. 1 v. o.—3 v. u. Zweite Methode zur Kubierung des Tetraeders.

Entwurf einer *Bittschrift* an den Erzherzog Johann, datiert Lemberg den 3. Mai 1832.

S. 229, Z. 18—S. 232, Z. 26. Bitte um Urlaub. Bedeutung der mathematischen Untersuchungen Johanns.

S. 229, Z. 13—9 v. u., 8—6 v. u., S. 232, Z. 3 v. u.—S. 233, Z. 4, S. 233, Z. 5—21, 28—30, 31—33; S. 242, Z. 19—17 v. u. Bemerkungen zu Gaussens Briefe vom 6. März 1832.

Eintragung in ein Handexemplar des *Appendix*.

S. 241, Z. 1—12. Denen die in die absolute Geometrie eindringen wollen, wird zunächst die Beschäftigung mit Hoffmanns *Kritik der Parallelentheorie* empfohlen.

Vorwort zu dem geplanten Werke *Reformation der Mathematik* aus der Zeit 1832 bis 1833.

S. 178, Z. 11—4 v. u. Einteilung des Werkes.

S. 190, Z. 7—22. Die Mathematik als die höchste Wissenschaft; Glück des Mathematikers.

Zettel aus der Zeit um 1833.

S. 103, Z. 16 v. u.—S. 104, Z. 6. Zusammenhang zwischen der sphärischen und der absoluten Trigonometrie.

Zettel aus dem Jahre 1833.

S. 238, Z. 6—16. Über Bemerkungen Wolfgangs zu Johanns absoluter Geometrie.

Vorwort zur *Raumlehre* (um 1834).

S. 71, Z. 14, 16—18. Zusammentreffen Wolfgangs und Johanns 1830, Abfassung der Raumlehre in lateinischer Sprache (*Appendix*).

S. 71, Z. 16—7 v. u. Streit Johanns mit Wolfgang wegen der absoluten Geometrie; man beschließt die Ausarbeitung an Gauss zu schicken.

S. 76, Z. 13—27. Erster Versuch Johanns, das Parallelenaxiom zu beweisen (1819—1820).

S. 79, Z. 6—S. 80, Z. 5. Asymptotische Gerade; Grenze des Kreises.

S. 82, Z. 11—15. Wolfgang verwirft den Kreis mit unendlichem Radius.

S. 83, Z. 16 v. u.—S. 84, Z. 7. Wolfgang zeigt kein Verständnis für die absolute Geometrie.

S. 86, Z. 19—29. Wolfgang rät Johann, seine Entdeckung der absoluten Geometrie bald zu veröffentlichen.

S. 87, Z. 19—S. 88, Z. 13. Wolfgang vermag nicht, Johanns absolute Geometrie zu würdigen.

S. 178, Z. 17—27. Plan einer enzyklopädischen Darstellung der Mathematik.

S. 221, Z. 19 v. u.—S. 223, Z. 20. Geschichtliche Bemerkungen zur Parallelentheorie; Entstehung der absoluten Geometrie.

S. 238, Z. 21—32. Über Bemerkungen Wolfgangs zu Johanns absoluter Geometrie.

Zettel aus der Zeit um 1834.

S. 232, Z. 3 v. u.—S. 233, Z. 4. Die Benennungen Parazykel und Hyperzykel.

Brief Johanns an Wolfgang Bolyai vom 15. April 1835.

S. 119, Z. 21—S. 120, Z. 5 v. u. Beweis der Unmöglichkeit, das Parallelenaxiom zu beweisen.

Zettel aus der Zeit um 1835.

S. 120, Z. 2 v. u.—S. 121, Z. 15. Bruchstück über den Beweis der Unmöglichkeit, das Parallelenaxiom zu beweisen oder umzustoßen.

Bemerkung auf einem Briefumschlag aus der Zeit um 1835.

S. 121, Z. 19—29. Widerspruchslosigkeit der absoluten Geometrie.

Randbemerkungen zu der deutschen Fassung des *Appendix* (1832) aus dem Jahre 1837.

S. 108, Z. 2—3, 7 v. o.—5 v. u. Längen der Kreisumfänge (Ringe) auf gleichmäßigen Flächen.

S. 122, Z. 5—1 v. u. Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms.

Aus einem Briefe Johanns an Wolfgang Bolyai aus der Zeit um 1837.

S. 124, Z. 3 v. u.—S. 125, Z. 17.

Zettel aus dem Jahre 1838.

S. 130, Z. 14—30. Kritik des Urteils der Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig über Johanns *Responsio*.

Brief Johanns an den Sekretär der Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig, Professor Hasse vom 30. Dezember 1841.

S. 245, Z. 4 v. u.—S. 246, Z. 16. Bitte um Rücksendung der *Responsio*.

Aus einem Brief Johanns an Wolfgang Bolyai aus dem Jahre 1845.

S. 127, Z. 13 v. u.—S. 128, Z. 14. Johann beschwert sich wegen eines Briefes von Wolfgang an Anton Bolyai aus dem Jahre 1838.

Bemerkungen zu Nicolaus Lobatschefskijs *Geometrische Untersuchungen*, verfaßt in der Zeit von 1848 bis 1850.

S. 136, Z. 8 v. u.—S. 137, Z. 11. Angebliche Äußerungen von Gauss über Lobatschefskij und Johann Bolyai.

S. 140, Z. 6—S. 141, Z. 16. Johann zieht Lobatschefskijs Selbständigkeit in Zweifel.

S. 141, Z. 7—3 v. u. Zu § 22 der *Geom. Unters.* (Imaginäre Geometrie).

S. 142, Z. 3 v. o.—8 v. u. Neue Fassung der Lehre von den asymptotischen Geraden.

S. 142, Z. 2 v. u.—S. 144, Z. 20. Zu § 27 der *Geom. Unters.* (Winkelmessung).

S. 144, Z. 22—S. 145, Z. 6 v. u. Winkelmessung.

S. 146, Z. 2 v. o.—9 v. u. Zu § 32 der *Geom. Unters.* (Definition der Hyperzykeln und Hypersphären).

S. 146, Z. 6—5 v. u., S. 147, Z. 7—21. Zu § 33 der *Geom. Unters.* (Die Gleichung $s' = se^{-x}$).

S. 147, Z. 13 v. u.—S. 149, Z. 1 v. u.; S. 150, Z. 15 v. o.—7 v. u. Zu § 35 der *Geom. Unters.* (Zusammenhang zwischen der sphärischen und der absoluten Geometrie).

S. 152, Z. 6 v. u.—S. 153, Z. 3 v. u. Zu § 36 der *Geom. Unters.* (Beweis der Gleichung $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$).

S. 154, Z. 1—11, 21—25; S. 155, Z. 2—S. 157, Z. 13; S. 157, Z. 7 v. u.—S. 158, Z. 18. Zu § 37 der *Geom. Unters.* (Grenzübergang von der sphärischen zur ebenen Geometrie; Widerspruchslosigkeit der absoluten Geometrie; praktische Entscheidung in Betreff der Gültigkeit des Parallelenaxioms; Zusammenhang zwischen der sphärischen und der absoluten Trigonometrie).

S. 236, Z. 12—17. Bemerkung über Karl Szász.

S. 259, Z. 21—34. Einfluß Wolfgang Bolyais auf Johann.

Aus einem Brief Johanns an Wolfgang Bolyai aus der Zeit um 1850.

S. 128, Z. 17—22. Versöhnliche Gesinnung Johanns.

Einleitung zu einem Entwurf der *Raumlehre* vom Jahre 1851.

S. 80, Z. 9—S. 81, Z. 2. Verkehr mit Karl Szász (1819—1820); Gespräche mit Szász über die Parallelentheorie.

S. 84, Z. 15—35. Ein mißglückter Versuch Johanns, das Parallelenaxiom zu beweisen; erst im Jahre 1823 gelingt es ihm durchzubrechen.

S. 236, Z. 24—S. 237, Z. 10. Darlegung eines mißglückten Versuches, das Parallelenaxiom zu beweisen.

S. 238, Z. 14 v. u.—S. 239, Z. 21. Unmöglichkeit einer Entscheidung über die Gültigkeit des Parallelenaxioms.

Titelblatt der *Allheillehre* aus der Zeit um 1851.

S. 260, Z. 5 — S. 262, Z. 12.

Vorwort zur *Allheillehre* aus der Zeit um 1851.

S. 96, Z. 12—39. Über Gaussens Brief vom 6. März 1832.

Verschiedene Zettel zur *Allheillehre* aus der Zeit um 1851.

S. 191, Z. 5 v. u. — S. 192, Z. 1. Die Mathematik ist die Grundlage der Allheillehre.

S. 192, Z. 12 v. o.—1 v. u. Wesen und Vorzüge der Allheillehre.

S. 193, Z. 7—19. Gestattete Vergnügungen.

S. 194, Z. 13—24. Unvollkommenheit der deutschen Sprache; Plan einer Weltsprache.

S. 194, Z. 25—27. Mehrdeutigkeit der üblichen Ausdrucksweise.

Verschiedene Zettel zur *Raumlehre* vom Jahre 1855.

S. 181, Z. 13 — S. 182, Z. 8. Allgemeines über die Gestalt der Kurven und Flächen; der Eulersche Polyedersatz.

S. 183, Z. 10 v. u. — S. 184, Z. 6. Bedeutung der Konstruktionslehre.

S. 184, Z. 9—22. Über Mascheronis *Geometrie des Zirkels*.

S. 185, Z. 3 — S. 186, Z. 15. Widerspruchslosigkeit der absoluten Geometrie; das System von fünf Punkten.

S. 186, Z. 9—5 v. u. Das System von sechs Punkten.

S. 186, Z. 1 v. u. — S. 187, Z. 2. Die Entscheidung zwischen S und Σ.

S. 234, Z. 9—34. Johanns erste Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen.

S. 257, Z. 21—29. Sein und Schein bei Raum und Zeit.

S. 257, Z. 10 v. u. — S. 258, Z. 8. Zerlegung von Flächen- und Raumstücken in Dreiecke und Tetraeder.

Zettel aus der Zeit um 1855.

S. 121, Z. 10 v. u. — S. 122, Z. 7; S. 122, Z. 15 v. o.—11 v. u.; S. 123, Z. 13—16. Zweifel an der Möglichkeit eines Beweises für die Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms.

Zettel aus der Zeit um 1855.

S. 253, Z. 4—17. Zusammenstellung von Problemen, deren Lösung Johann in seiner Macht zu haben glaubte.

Titelblatt einer Abhandlung über die *Quadratur des Kreises* um 1855.

S. 253, Z. 19—24.

Umarbeitung der *Abhandlung über imaginäre Größen* (*Responsio*), um 1855.

S. 254, Z. 15 — S. 257, Z. 18. Mitteilung von § 1, Methode der Untersuchung und § 2, Negative Größen.

Zettel, der Umarbeitung der *Responsio* beigelegt, aus der Zeit um 1855.

S. 105, Z. 15 — S. 107, Z. 8 v. u. Anwendung der Lehre von den imaginären Größen auf die absolute Geometrie; die Geometrie auf den überall gleichmäßigen Flächen.

Zettel aus der Zeit um 1855.

S. 253, Z. 18—10 v. u. Funktionen mit einer imaginären Veränderlichen.

Zettel aus der Zeit um 1855.

S. 253, Z. 6—3 v. u. Differentiation von x^a bei beliebigen, auch imaginären Werten des Exponenten a.

Aus einem Brief Johanns an Wolfgang Bolyai aus der Zeit um 1855.

S. 252, Z. 10 v. u.—S. 253, Z. 3. Über Johanns Krankheit.

Einleitung zum *Beweis des XI. Axioms* aus dem Jahre 1856.

S. 7, Z. 23—28. Wolfgang Bolyais Aufenthalt in Jena.
S. 8, Z. 8 v. u.—S. 9, Z. 3. Wolfgang Bolyai in Göttingen; Freundschaft mit Gauss.
S. 14, Z. 18—10 v. u. Wolfgang Bolyai im Verkehr mit Damen.
S. 51, Z. 11—18. Aus Johanns Kindheit.
S. 52, Z. 16—23. Erste mathematische Ausbildung Johanns.
S. 56, Z. 17 v. u.—S. 57, Z. 9. Verhalten von Gauss, als Johann zu diesem geschickt werden sollte.
S. 57, Z. 16—8 v. u. Wolfgang hätte Johann nicht von sich entfernen und auf die Ingenieurakademie in Wien bringen sollen.
S. 76, Z. 8—11. Äußerungen Wolfgangs über die Wichtigkeit der Parallelentheorie.
S. 85, Z. 5—9. Johann entdeckt im Winter 1823 den Satz im § 29 des *Appendix*.
S. 90, Z. 23—35. Unzureichender Beweis Wolfgangs für die Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms.
S. 99, Z. 12—3 v. u. Johann wünscht, die Raumlehre dem Vater zu widmen.
S. 174, Z. 9—5 v. u. Äußerungen der Dankbarkeit gegen den Vater.
S. 186, Z. 22—26. Ausführlicher Titel der Abhandlung über den Beweis des XI. Axioms.
S. 196, Z. 13 v. u.—S. 197, Z. 9; S. 197, Z. 11—35. Vergleichung von Wolfgang Bolyai und Gauss.
S. 209, Z. 23—34. Wolfgang Bolyai als Knabe in Nagyenyed.
S. 226, Z. 12—15. Aus Johanns Kindheit.
S. 228, Z. 11—14. Johann spielt nicht, raucht nicht, trinkt nicht.
S. 228, Z. 18—11 v. u. Wolfgang vermag nicht, Johanns Entdeckung der absoluten Geometrie zu würdigen; man beschließt, die Ausarbeitung an Gauss zu senden.
S. 244, Z. 20—14 v. u. Streit Johanns mit Wolfgang wegen ungenügender Anerkennung der Raumlehre.

Verschiedene Zettel aus der Zeit um 1856.

S. 115, Z. 7 v. o.—1 v. u. Zweite Methode zur Kubierung des Tetraeders.
S. 116, Z. 12—S. 117, Z. 11. Dritte Methode zur Kubierung des Tetraeders.
S. 117, Z. 9—3 v. u. Vierte Methode zur Kubierung des Tetraeders.

Aus Briefen Johanns an seinen Bruder Gregor Bolyai aus den Jahren 1857—1859.

S. 175, Z. 9—18. Johann berichtet über sein Befinden.

Sach- und Namenverzeichnis

Die Zahlen bezeichnen die Seiten.
Die Abkürzungen W. B. und J. B. bedeuten Wolfgang und Johann Bolyai.

Absolute Geometrie, unabhängig von der Wahrheit oder Falschheit des Parallelenaxioms, Entdeckung der a. G. durch J. B. 75—97; Widerspruchslosigkeit der a. G. 122—123, 185—186.
Alberti, Kaufmann in Göttingen 212.
Alexander der Große 218.
Antal, Josef, Prof. der Geschichte am Kollegium zu Maros-Vásárhely 58—59.
Appendix, J. B.s Raumlehre, Entstehung und Bedeutung 85—90; Urteil von Gauß 91—97; Vergleich mit Lobatschefskijs Geom. Unters. 158—160.
Arany, Johann, ungarischer Dichter 167.
Archimedes 39, 221, 222, 223, 257.
Äsop 259.

Baltzer, Richard, weist hin auf W. B.s und J. B.s geometrische Untersuchungen 198—199, 262—263.
Battaglini übersetzt J. B.s Appendix ins Italienische 200, 265.
Bedőházi, Johann, verfaßt eine Beschreibung des Lebens von W. B. und J. B. 14, 23, 24, 26, 30, 56, 99, 163, 164, 195, 203, 204, 206, 209, 214, 215, 216, 227, 241, 244 ,250, 251, 262, 266.
Beltrami 109, 242.
Benkö v. Arkos, Schwiegervater W. B.s 14.
Benkö v. Arkos, Juliana, geb. Bachmann, Schwiegermutter W. B.s 14.
Benkö v. Arkos, Susanna, W. B.s erste Frau 14—15, 20, 54, 58, 59—60.
Beöthy, Sz. 215.
Bernoulli, Johann I. 18, 257.
Bernoulli, Johann III. 43.
Bertrand, Louis, versucht 1778, das Parallelenaxiom mittels Betrachtung unendlicher Flächenräume zu beweisen 48, 29, 222, 225, 263.
Bessel 49, 220, 221.
Bethlen, Graf Adam B. 210.
Bethlen, Graf Alexius B. 209.
Bewegung starrer Körper als Grundlage der Geometrie 39—40.
Biás v. Ders, Stephan, gibt 1907 einen Neudruck des Appendix heraus 203.
Bischoff, Preußischer Grenzkommissar 73.
Blumenbach, Joh. Friedr., Prof. der Medizin in Göttingen 7.
Bod, Peter, Schüler W. B.s 30, 127.
Bodoki, Samuel 66.
Bodor, L. 214.
Bodor, Paul, Freund W. B.s in Klausenburg 14, 55, 59, 60, 64, 65, 66, 67, 69—70, 70, 207, 212, 214.
Bolyai, Amalie, Tochter J. B.s 101, 173.
Bolyai, Anton, Bruder W. B.s 2, 16, 98, 100, 101, 127, 228.
Bolyai, Christine, Frau Kaspar Bolyais 2.
Bolyai, Dionys, Sohn J. B.s 101, 173, 227.
Bolyai, Gabriel 209.
Bolyai, Gregor, Sohn W. B.s aus zweiter Ehe 3, 5, 19, 24, 65, 70, 98, 101, 127, 167, 175, 209, 210, 215, 228, 241, 251.
Bolyai, Johann, im 16. Jahrhundert homo regius 2.
Bolyai, Johann, Sohn W. B.s 1, 7, 8, 12, 15; J. B.s Jugend (1802—1818) 33, 35, 40, 42, 47, 50; J. B.s Erziehung 51—55; J. B. soll nach Göttingen zu Gauß geschickt werden 55—57; Vorbereitung für die Ingenieur-Akademie in Wien 57—59.
J. B. auf der Ingenieur-Akademie in Wien (1818—1823) 61—68; Aufnahme und Eingewöhnung 63—64; Fortschritte, besonders in der Mathematik 65—66; Verkehr mit Karl Szász 66; J. B. wird als zweiter des Jahrgangs Ingenieur-Korps-Kadett 67.
J. B. im Militärdienst (1823—1833) 69—74; Unterleutnant in Temesvár 69—70; Besuch bei W. B. in Maros-Vásárhely 69—70; J. B. in Arad und Lemberg; Oberleutnant 70—72; geometrische Untersuchungen 71—72; J. B. in Olmütz; Hauptmann zweiter Klasse 72—74; Urlaubsgesuch 72—73; Verabschiedung 73—74; Rückkehr nach Maros-Vásárhely 74.

Die Entdeckung der absoluten Geometrie durch J. B. 75—97; Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen 75—84; erste Anregung durch den Vater W. B. 75—76; erste Versuche 76; Warnung W. B.s 76—79; Asymptoten und Parazykeln; Verkehr mit Karl Szász 80—82; Bemühungen um die absolute Trigonometrie 83; unzureichender Beweis für das Parallelenaxiom 84; Aufbau der absoluten Geometrie 85—86; Streitigkeiten mit dem Vater 86—88; J. B.s Auffassung vom Wesen der abs. Geometrie 88—89; weitere Streitigkeiten zwischen W. B. und J. B. 89—90; Gaußens Entscheidung wird angerufen; Druck des Appendix 90—91; Gaußens Brief vom 6. März 1832 92—95; J. B.s Urteil über G.s Verhalten 95—97.

J. B. in Domáld (1834—1846) 98—101; Zwist mit dem Vater 98—99; vergebliche Bewerbung um den Preis der Jablonowskischen Gesellschaft in Leipzig 100; Leben in Domáld 101; neuer Zwist mit W. B. 101.

Weitere Untersuchungen zur abs. Geometrie 102—123; Zusammenhang zwischen der sphärischen und der absoluten Trigonometrie 103—109; die Geometrie auf den überall gleichförmigen Flächen eines absoluten Raumes 109; die Kubierung des Tetraeders 109—118; die Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms 118—123.

J. B.s Lehre von den imaginären Größen 124—133; vergebliche Bewerbung um den Preis der Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig 125—130; Streit mit dem Vater 126—128; Würdigung der Lehre J. B.s; Vergleich mit Hamilton 130—133.

J. B. und Lobatschefskij 134—160; wie J. B. Lob.s Geometrische Untersuchungen vom Jahre 1840 kennen lernte 134—139; Bemerkungen zu Lob.s Geom. Unters. 140—160; Winkelmessung 142—145; Absolute Trigonometrie 147—150; eine Lücke in § 36 der Geom. Unters. 150—153; Frage der Entscheidung über die Giltigkeit des Parallelenaxioms 153—157; Beziehung zwischen der sphärischen und absoluten Geometrie 157—158; zusammenfassender Vergleich zwischen J. B. und Lobatschefskij 158—160.

J. B.s Verhältnis zu W. B. in dessen letzten Jahren 164—172.

Letzte Jahre J. B.s 173—175; Vereinsamung 174; letzte Krankheit 175.

Mathematische Untersuchungen der Spätzeit 175—188; allgemeine Übersicht 176—178; Reformation der Elemente der Mathematik 176; Untersuchungen zur Raumlehre 179—188; Bruchstücke der Raumlehre 180—184; die Widerspruchslosigkeit der absoluten Geometrie 185—188.

J. B.s Allheillehre 189—195.

Das Urteil der Nachwelt; allmähliche Anerkennung der Leistungen J. B.s 196—202; Feier des hundertjährigen Geburtstags; der Bolyai-Preis der Ungarischen Akademie 203—204.

Verzeichnis von Schriften, die sich auf W. B. und J. B. beziehen 206—208.

Anmerkungen und Nachweisungen 210, 213, 214, 216; Brief an W. B. über Gerling 217; 219, 220; geschichtliche Bemerkungen zur Parallelentheorie 221—223; 224; lateinische Prüfungsarbeit (1817) 226; 227, 228; Entwurf der Bittschrift an den Erzherzog Johann (1832) 229—233; 235; mißglückter Versuch, das Par.-Ax. zu beweisen 236—237; Brief J. B.s an W. B. vom 3. Nov. 1823 237; J. B.s Auffassung der absoluten Geometrie 238—239; 240, 241, 242, 244; Brief an den Sekretär der Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig vom 30. Dez. 1847 245—246; 251, 252; Aufzeichnungen zur Analysis aus der Spätzeit 253—257; Aufzeichnungen zur Raumlehre aus der Spätzeit 257—258; 259; ausführlicher Titel der Allheillehre 260—262; 263, 264, 265, 266, 267.

Bolyai, Julius, Sohn J. B.s 101, 173.

Bolyai, Kaspar, Vater W. B.s 2, 16, 211—214.

Bolyai, Kaspar, Sohn Gregor B.s 228.

Bolyai, Susanna, geb. Benkö v. Arkos, W. B.s erste Frau 14—15, 20, 54, 58, 59—60.

Bolyai, Theresia geb. Nagy, W. B.s zweite Frau 70, 98

Bolyai, Wolfgang 1; W. B.s Jugend (1775—1796) 2—6; W. B. auf dem Kollegium zu Nagyenyed 3—4; Freundschaft mit dem Baron Simon Kemény 4; W. B. mit Kemény in Klausenburg 4—5; reist mit K. nach Deutschland 5—6.

W. B. in Deutschland (1796—1799) 7—11; Jena 7; Göttingen 7—11; Freundschaft mit Gauß 8—11; Abschied von Gauß 11.

W. B. in Klausenburg und Domáld 12—15; Rückkehr in die Heimat 12—13; Leben in Klausenburg, Hochzeit mit Susanna Benkö 14—15; auf dem Gute in Domáld; Geburt Johanns in Klausenburg 15.

W. B. als Professor am Kollegium zu Maros-Vásárhely (1804—1853) 16—26; Berufung 16; Wohnhaus 17; Wiederaufnahme der mathematischen Untersuchungen 17—18, W. B. als Lehrer 18—19; Bemühungen um die Ausbildung der magyarischen Sprache 19—20; W. B. als Dichter 20—24; W. B. als Musiker 24; W. B. als Techniker, Öfen usw. 24—25; W. B.s Bemühungen, Forstinspektor von Siebenbürgen zu werden 25; W. B.s mathematische Veröffentlichungen 25—26; Schilderung von W.s Persönlichkeit 26.

W. B. als Mathematiker 27—50; die Entstehung und Herausgabe des Tentamens 27—30; Urteile über das Tentamen 30—32; W. B.s System der Mathematik 32—33; Aufbau der Arithmetik 33—37; Aufbau der Geometrie 38—40; endlich gleiche Flächenstücke 40—41; Untersuchungen über das Parallelenaxiom 41—50.

W. B. und J. B., Erziehungsgrundsätze 51, 53; W. B. über den 15jährigen Johann 53—54; Johann soll zu Gauß geschickt werden 55—56; Sorge für J. auf der Ingenieur-Akademie 67—68; Besuch J.s 1825, erster Streit 70; warnt J. vor der Beschäftigung mit dem Parallelenaxiom 76—79, 82—83; Streitigkeiten mit J. wegen der Anerkennung der absoluten Geometrie 83—84, 87—88; der Appendix wird an Gauß geschickt; G.s Antwort 90—95; Zusammenstoß mit J. nach dessen Rückkehr in die Heimat (1833) 98; Verhältnis zu J. in den späteren Jahren 99; gemeinsame Bewerbung um den Preis der Jablonowskischen Gesellschaft betr. Konstruktion der imaginären Größen 124—129; neuer Streit (1837) 126—127; abermaliger Streit wegen des Briefes W. B.s an seinen Bruder Anton (1846) 127—128; Versöhnung 128, 174—175; letzter Zwiespalt (1856) wegen des Testamentes von W. B. 166—167.

W. B.s letzte Jahre (1848—1856) 161—172; Wiederaufnahme des Briefwechsels mit Gauß 161—163; Besuch von Kreil 163—164; Tod von Gauß 164—165; „Abschied von der Erde" 165—166; letzte Krankheit 166—172; J. B.s Urteil über Wolfgangs gesamte Wirksamkeit 172.

W. B. und J. B. in den letzten Jahren 173, 174, 177, 178, 179, 183, 186, 188, 189, 190, 193, 194, 195.

Das Urteil der Nachwelt; allmähliche Anerkennung der mathematischen Untersuchungen W. B.s 196—204; der Bolyai-Preis der Ungarischen Akademie 203—204.

Verzeichnis der von W. B. veröffentlichten Schriften 205—206; Verzeichnis von Schriften, die sich auf W. B. und J. B. beziehen 206—208.

Anmerkungen und Nachweisungen 209; über die Autobiographie Wolfgangs 210; Baron Simon Kemény's Brief vom 30. Jan. 1799 an W. B.s Vater 211—214; 215; Beziehungen zwischen W. B. und Gerling 216—217; Brassais Urteil über W. B.s Tentamen 218; 219, 220, 221, 222, 223; aus dem Briefe W. B.s an J. B. vom 4. April 1820 224—225; 227, 228, 232, 234, 235, 236; Streitigkeiten mit J. B. wegen der absoluten Geometrie 238—239; 240, 241, 243; aus der Abhandlung über imaginäre Größen (1837) 245—246; neue Schreibweise der magyarischen Sprache 247; 249; Nachruf auf Karl Szász 250—251; 252; J. B. über den Einfluß, den W. B. auf ihn gehabt hat 259; 262, 263, 265, 266, 267.

Boncompagni, Balthasar, Fürst B. Herausgeber des Bulletino di bibliogr. e di storia d. sc. mat. e fis. 200, 265.

Bonola 204, 220, 267.

Borel 257.

Bossut, Charles, versucht, 1775 das Parallelenaxiom zu beweisen 222.

Bourgeois, Direktor der Ingenieur-Akademie zu Wien (1790—1811) 62.

Brandes, Prof. der Mathematik in Breslau und Leipzig 9, 211.

Brassai, Samuel, Prof. der Mathematik an der Universität Klausenburg, über Wolfgangs Dramen 23; Gedächtnisrede auf W. B. 203, 206, 210, 218, 266.

Braunmühl, A. v. B. 235.

Bricard 188, 259.

Buée, Lehre von den imaginären Größen 125, 244.

Bürger, J. A. P., schreibt über das Parallelenaxiom (1833) 222, 223.

Cantor, Georg, Erklärung des Kontinuums 37, 218.

Cantor, Moritz 235.

Carnot, Lazare 47, 218.

Cartan 245.

Cauchy 218.

Cayley 187, 243, 258.

Clavius, schreibt über das Parallelenaxiom (1591) 222.

Comenius, wirkt 1650—1652 als Prof. am Kollegium zu Sárospatak 17.

Coste, zeigt, daß Hausens Beweisversuch für das Parallelenaxiom unzureichend ist 87.
Crelle 261.
Csányi, Daniel 129.
Czermák, Josef 67.

Dannmeyer, Volumenberechnung in der absoluten Geometrie 242.
Dehn 188, 259.
Delboeuf 219.
Desargues 263.
Dicsö, Schüler W. B.s 172, 201.
Döbrentei, Georg 21; über W. B.s Dramen 23.
Dobriner 220.
Dósa, Alexius, Prof. am Kollegium zu Maros-Vásárhely 125.
Döttler, Prof. der Physik a. d. Universität Wien 52, 226.
Dreiteilung des Winkels 233.
Drobisch, Prof. der Mathematik a. d. Universität Leipzig 125, 244.
Dumas 218.
Dux 215.

Ebene, Erklärung der Ebene bei W. B. 40; Gauß beanstandet die übliche Erklärung der Ebene 93—94; Erklärung der Ebene bei J. B. 182—183
v. Eckartshausen 259.
Eichhorn, Preußischer Kultusminister, Freund von Gauß, 9, 211.
Encke 94, 220, 221, 246.
Endlich-gleiche Flächen- und Raumstücke 40—41, 188.
Engel, vergleicht J. B.s und Lobatschefskijs Leistungen für die absolute Geometrie 158—160; 206, 207, 210, 214, 216, 220, 223, 224, 225, 228, 234, 238, 240, 241, 242, 243, 246, 247, 248, 249, 258.
Enriques 220.
Eötvös, Josef, Baron, ungarischer Kultusminister 200.
Erb, K. A. 218.
Eschenburg, Freund von Gauß 9, 211.
Ettingshausen 140, 141, 217, 229.
Eugen, Prinz v. Savoyen, veranlaßt die Gründung der Wiener Ingenieur-Akademie 61.
Euklid 18; wendet Bewegungen möglichst wenig an 39; E.s Parallelenaxiom 41, 43, 47, 82, 93, 95, 103, 104, 109, 140, 149, 159, 174, 181, 184, 186, 217, 219, 220, 221, 222, 223, 231, 252, 263, 264.
Euler 18; J. B. studiert E.s Algebra 52, 100; E.s Polyedersatz 181—182; 218, 226, 235, 248.

Ferroni 235.
Fichte 7, 210.
Fourier 219, 247.
Forti, Angelo 200, 207, 265.
v. Frank 242.
Franz II, Kaiser von Oesterreich 63.
Franz Josef, Kaiser von Oesterreich, Besuch in Maros-Vásárhely (1852) 23; 206.
Frischauf 50, 117, 202, 226, 242, 265.
Fritsch, Karl, macht 1848 mit Kreil in Maros-Vásárhely magnetische Beobachtungen 249.

Gatti, Friedrich, Geschichte der Wiener Ingenieur-Akademie 210, 227.
Gauß, Carl Friedrich, Freundschaft mit W. B. 8—11, 14, 15; 16, 17, 18, 20, 24, 30, 31, 32, 33, 34, 38; Brief vom 16. Dez. 1799 über die Grundlagen der Geometrie 42—43; 43; Brief vom 25. Nov. 1804, Kritik der Göttingischen Parallelentheorie von W. B. 44—45; 46, 49, 51, 52, 54; läßt W. B.s Bitte, seinen Sohn Johann zu ihm bringen zu dürfen, unbeantwortet 55—57; erhält Johanns Appendix 71—72; Brief an Gerling vom 14. Febr. 1832 über den Appendix 72, 73; Karl Szász besucht G. 81—82; 86, 90; Brief an W. B. vom 6. März 1832 über den Appendix 91—94; die Untersuchungen von G. über die absolute Geometrie 94—95; J. B. über G.s Brief vom 6. März 1832 95—97; 98, 99, 100, 102, 109; Kubierung des Tetraeders 113, 118, 119; G.s Lehre von den imaginären Größen 125, 130, 133, 134; Mentovich besucht Gauß 135—136; 136, 137, 138, 140, 141, 161, 162, 163, 164; Wolfgang erfährt den Tod von G. 164—165; 166, 167, 172, 174, 176, 179, 180, 186, 187, 188; Sartorius v. Waltershausen über G.s und W. B.s Jugendfreundschaft 196—198; Baltzer über G.s Ansichten in Betreff der Grundlagen der Geometrie 198—199; 200, 207, 208, 209, 211, 215, 216, 217, 218, 220, 221, 223, 224, 225, 228, 230, 232, 233, 234, 235, 238, 239, 240, 242, 243, 246, 247, 249, 251, 258, 259, 262, 264, 265.
Gauß, Eugen, Sohn von C. F. Gauß 227.
Gauß, Josef, Sohn von C. F. Gauß 227.
Gauß, Karl Wilhelm, Sohn von C. F. Gauß 227.
Gauß, Johanna, geb. Osthof, erste Frau von C. F. Gauß 224.
Gauß, Minna, geb. Waldeck, zweite Frau von C. F. Gauß 227.
Gauß, Minna, Tochter von C. F. Gauß 227.

Gauß, Therese, Tochter von C. F. Gauß 227.
Gauthier-Villars 200.
Georg V., König von Hannover 251.
Gerade Linie, Erklärung bei W. B. 40; Erklärung bei J. B. 182—183; Gauß über die Erklärung der ger. L. 197.
Gerhardt, C. J. 219.
Gerling, Prof. der Mathematik a. d. Universität Marburg, Schüler und Freund von Gauß 32, 72, 94, 137, 163, 188, 215, 216, 217, 221.
Goethe, W. B. liest G.s Werther 7.
Grashof, C. A. 219, 235.
Gray. Thomas, Englischer Lyriker (1716—1771), W. B. übersetzt Gedichte von G. 22.
Grenze, Begriff der G. bei W. B. 35—36.
Grillparzer 22.
Grunert 200, 201.
v. Guilleaume, Athanasius, Forstinspektor von Siebenbürgen 25.
Gyulás, Karl 210.

Halász, Georg, Hauptmann und Lehrer an der Wiener Ingenieur-Akademie 64.
Halsted, George Bruce, übersetzt den Appendix ins Englische 202, 265.
Hamilton, W. R., sieht die Zeit als Träger der stetig veränderlichen Größen an 33; H.s Lehre von den komplexen Größen 132—133, 217, 246.
Hamlet 44.
Hankel 34; Prinzip der Permanenz 35, 217, 244.
Harzer, über das Krümmungsmaß des Raumes 243.
Hasse, Sekretär der Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig 245.
Hauff, Schriften über die Parallelentheorie (1793—1821) 222.
Hausen, versucht 1734, das Parallelenaxiom zu beweisen 87, 222
v. Hauser, Matthias, Lehrer der Mathematik a. d. Wiener Ingenieur-Akademie, Mathematisches Lehrbuch 58, 222, 227.
Heeren, Prof. der Geschichte an der Universität Göttingen 7.
Hegedüs, Franz, Prof. der Mathematik am Kollegium zu Maros-Vásárhely 249.
Helmholtz, Begründung der Geometrie aus der Bewegung starrer Körper 39, 202, 219.
Herepei, Adam, Lehrer W. B.s. 4.
Herepei, Johann, erster Lehrer W. B.s. 3, 4.
Herschel 156.
Herzogenberg, Baron, Direktor der Wiener Ingenieur-Akademie (1820—1834), 65.
Hessenberg 225.
Hessling 224.
Heyne, Prof. der alten Sprachen a. d. Universität Göttingen 7.
Hilbert, Grundlagen der Geometrie 40, 188; erhält 1910 den Bolyai-Preis 204; 219, 259.
Hindenburg, Schriften über die Theorie der Parallelen (1781—1799) 222.
Hoffmann, Joh. Jos. Ign., Schrift über die Theorie der Parallelen 223, 231, 239, 241.
Horváth, Wolfgang, beschreibt W. B.s Öfen 215.
Hoüel, Jules, 146, weist hin auf W. B.s und J. B.s geometrische Untersuchungen und übersetzt den Appendix ins Französische 199—200, 207, 248, 264.

Ide, Prof. der Mathematik a. d. Universität Kasan, Freund von Gauß 9, 211.
Imaginäre Geometrie, Bezeichnung Lobatschefskijs für die nichteuklidische Geometrie 109, 141.
Imaginäre Größen, Lehre von den im. Gr. bei W. B. 34—35, 124—129; Lehre von den im. Gr. bei J. B. 129—133, 177.
Imre, Alexander 20, 215.

Jablonowskische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 100, 104, 125, 128, 245, 246.
Jean Paul [Friedrich Richter] 23.
Johann, Erzherzog von Österreich, Oberdirektor der Wiener Ingenieur-Akademie 63—65; Bittschrift J. B.s an den Erzherzog J. vom 8. August 1832 72—73, 74, 107, 189, 191, 223, 227, 231; Entwurf der Bittschrift vom 3. Mai 1832 229—232, 240.
Jókai, Maurus, ungarischer Schriftsteller 169.
Joseph II, Kaiser von Österreich 2, 162, 164.
Jung, Kollegiumsschuster zu Maros-Vásárhely 170.

Kant, Einfluß auf W. B. 33; seine Kritik der reinen Vernunft gibt Anlaß zu Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie 42; Gauß erklärt sich gegen K.s Behauptung, der Raum sei nur Form unserer Anschauung 94; 198, 217, 240.
Karl VI., Römisch-deutscher Kaiser 61.
Karl Wilhelm Ferdinand, Herzog von Braunschweig 8.
Karsten 18; Schriften über die Parallelentheorie (1758—1786) 222.

Kästner, Prof. der Mathematik a. d. Universität Göttingen 8, 18; verzweifelt an der Möglichkeit, das Parallelenaxiom zu beweisen 41—42, 87; Federzeichnung von Gauß, K. darstellend 163; 220, 231.
Katona, Alexius, Freund W. B.s in Wien 127.
Katona, Josef, Verfasser des Trauerspiels Banus Bánk 22, 215.
Kazinczy, Erneuerer der magyarischen Sprache 19.
Kemény, Baron Koloman K. 215.
Kemény, Baron Nicolaus K., General-Kurator des Kollegiums zu Maros-Vásárhely 59, 64, 66.
Kemény, Sigmund 251.
Kemény, Baron Simon K., Freundschaft mit W. B. 4; bewegt W. B., mit ihm nach Deutschland zu gehen 5—6; K. mit W. B. in Jena und Göttingen 7—11, 13, 55; Brief K.s vom 30. Jan. 1799 an Kaspar Bolyai 211—214; 215, 216, 227, 250.
Kendeffy, Graf Adam K. 55, 66.
Kepler 18, 244.
Kerekes, Franz, Prof. der Naturgeschichte am Kollegium zu Debreczin, Preisschrift über die Lehre von den imaginären Größen 129, 218.
Kies, Johann 235.
Killing 217, 219, 243.
Kircher, Adolf, Schrift über die Lehre von den Parallellinien (1803) 222.
Kisfaludy, Karl, sein Trauerspiel Irene durch W. B. beeinflußt 22.
Klein, Felix, über die Widerspruchslosigkeit der absoluten Geometrie 187, 258.
Klindworth, Line 9.
Klopstock 30.
Klügel, Simon, schreibt 1763 die erste Geschichte der Parallelentheorie 42, 220.
Knorr, Ernst 225, 246—247.
Koenigsberger, Leo 219.
Komplexe Zahlen, siehe imaginäre Zahlen.
Koncz, Josef, Prof. am Kollegium zu Maros-Vásárhely, letzter Schüler W. B.s und dessen Biograph 14, 19, 25, 27, 171, 203, 207, 210, 211, 214, 215, 216, 219, 227, 266.
König, Julius, Herausgeber des Tentamens 32, 200, 203, 206, 210.
Kont, I. 19, 210, 214.
Kontinuum, Begriff des K.s bei W. B. 37.
Kreil, macht 1848 magnetische Beobachtungen in Maros-Vásárhely 163, 165, 196, 249, 262.
Krizbai, Alexius Desiderius, ev. ref. Geistlicher in Klausenburg 15.
Krümmungsmaß, Flächen konstanten Kr.m.es 109.
Kühn, Prof. der Chemie a. d. Universität Leipzig, Sekretär der Jablonowskischen Gesellschaft 126, 127, 129.
Kummer 49.
Kürschák, Josef, Herausgeber des Tentamens 32, 204, 206; entziffert J. B.s Aufzeichnungen über Lobatschefskijs Geom. Unters. 139; 208, 218, 226, 246, 248.

Lacroix, versucht, das Parallelenaxiom zu beweisen 18, 222.
Lagrange 18, 100, 218.
Lakatos, S., Prof. am Kollegium zu Maros-Vásárhely 204.
Lalande 18.
Lambert, Theorie der Parallellinien (1766) 43, 76, 220, 221, 235, 248.
Laplace 47, 174.
Laugel 207.
Legendre, ersetzt das Parallelenaxiom durch die Forderung der Existenz ähnlicher Figuren 47; versucht das Par.-Axiom mittels unendlicher Flächenräume zu beweisen 48, 221, 222, 225, 248, 263.
Lehmann, J. W. H. 221, 232.
Lencker, Michael, Lehrer a. d. Wiener Ingenieur-Akademie 67, 228.
Leibniz 218, 219, 257.
Lengyel, Prof. am Kollegium zu Klausenburg 66.
Lichtenberg, Prof. der Physik a. d. Universität Göttingen 7, 8.
Lie, Sophus 258, 266.
Liebmann 220, 242, 243, 244, 248, 249.
Lipschitz 243.
Littrow, Josef Johann 18, 141, 229, 247.
Lobatschefskij, über den Versuch von Wallis, das Parallelenaxiom zu beweisen 47; über den Beweisversuch von Bertrand 48—49; 81; veröffentlicht 1829 seine Anfangsgründe der Geometrie 86; L. über den Zusammenhang zwischen der sphärischen und der imaginären Geometrie 108—109; Kubierung des Tetraeders 109, 116, 117—118; J. B. erfährt von L.s Geom.-Unters. zur Theorie der Parallellinien 134—139; J. B.s Bemerkungen zu L.s Geom. Unters. 140—160; 162, 175, 177, 187, 198, 199, 200, 202, 206, 208, 219, 224, 225, 235, 242, 243, 246, 247, 248, 249, 254, 258, 259, 263, 264, 266.
Lorenz 217.
Lübsen 262.

Maria Theresia, römisch-deutsche Kaiserin, Königin von Ungarn 2.

Mascheroni, J. B. über M.s Geometria del compasso 184.
Mauduit 235.
Meiseler, Geiger in Wien 65.
Mentovich, Franz, Prof. der Mathematik am Kollegium zu Maros-Vásárhely 31; Unterredung mit Gauß 135—136; 161, 216, 235, 249.
Metius, Adrian 18.
Metternich, Matthias, Schriften über die Theorie der Parallellinien (1815, 1822) 264.
Milton, W. B. übersetzt Gedichte von M. 22.
Mitscherlich, Christoph Wilhelm, Prof. der alten Sprachen a. d. Universität Göttingen 7.
Montucla 18.
Mourey, Lehre von den imaginären Größen 125, 244.
Müller, Carl Reinhard, Theorie der Parallellinien (1822) 264.
Murrai, Sophie 9.

Nagy, Theresia, zweite Frau W. B.s 70.
Nagy v. Szopor, Karl, ungarischer Mathematiker und Astronom 31, 216.
Napoleon 11, 227.
Nassir-Eddin, arabischer Mathematiker, versucht, das Parallelenaxiom zu beweisen 222.
Negative Zahlen, W. B.s Lehre von den n. Z. 34; J. B.s Lehre von den n. Z. 131, 230.
Neper 101.
Neumann, Carl 244.
Newton 18, 39, 77, 82, 147, 162, 165, 166, 218, 250, 263.
Nichteuklidische Geometrie, auf der Annahme der Falschheit des Parallelenaxioms beruhend 230.
Nobili, Graf, Direktor der Wiener Ingenieur-Akademie (1811—1820) 62—64.

Olbers 94.
v. Orbán, Rosalie 101, 173, 252.
Osthof, Johanna, erste Frau von Gauß 227.

Paganini 169.
Pálmay, Josef 209.
Parallelenaxiom, das Par.-Ax. bei Euklid 41; Beweisversuche 41—42; W. B.s Untersuchungen über das Par.-Ax. 43—50; J. B.s Versuche, das Par.-Ax. zu beweisen 75—84; Unmöglichkeit einer Entscheidung, ob das Par.-Ax. gilt oder nicht 86—88, 118—122, 154—157.
Pasch, Grundlagen der Geometrie 40, 188, 219, 259.
Peacock, Prinzip der Permanenz 35.
Peano, Grundlagen der Geometrie 40, 188, 219, 259.
Peters, Christian August Friedrich, Herausgeber des Briefwechsels zwischen Gauß und Schumacher 198.
Pfaff, glaubt, daß man das Parallelenaxiom nicht beweisen, sondern nur simplifizieren könne 17, 24, 47, 216, 222.
Phaedrus 259.
Phragmén 244.
Pieri, sucht die Geometrie auf dem Begriff der Kugel aufzubauen 219.
Plato 9.
Poincaré, erhält 1905 den Bolyai-Preis 204, 244.
Polyedersatz von Euler, 179—180.
Pope, W. B. übersetzt P.s Essay on man 22, 206,
Pringsheim, Alfred 248.
Proklus, über das Parallelenaxiom 41, 222
Ptolemäus, versucht, das Parallelenaxiom Euklids zu beweisen 41.
Pyramide, siehe Tetraeder.

Quadratur des Kreises 160.
Quensen 242.

Radak, Baron 4.
Rados, Ignaz, übersetzt den Appendix ins Magyarische (1897) 203; 249, 250, 251, 266.
Rákóczi, Georg I, Fürst von Siebenbürgen 17.
Ráth, Ignaz, Forstinspektor von Siebenbürgen 25.
Reichenbach, Multiplikator-Kreis von R. 155.
Réthy, Ludwig, Bericht über W. B.s letzte Tage 167.
Réthy, Moritz, Herausgeber des Tentamens 32, 203, 206; Untersuchungen über endlich-gleiche Flächenstücke 41; Vorlesungen an der Universität Klausenburg über absolute Geometrie 201—203; 220.
Richmond, Formel für das Tetraedervolumen in der absoluten Geometrie 242.
Riedl, Friedrich 210, 215
Riemann 187, 202, 218, 258.
Ring, Bezeichnung für die Kreislinie bei W. B. und J. B, Eigenschaften des Ringes 40, 180—181.
Rousseau 51.
Rudio 248.
Runde, Bezeichnung für die Kugeloberfläche bei W. B. und J. B., Eigenschaften der Runde 40, 180—181.

Saccheri, Euclides ab omni naevo vindicatus (1733) 43, 47, 76, 220, 221, 234.

Sartorius v. Waltershausen, Biograph von Gauß 11, 20, 22, 23, 95, 165, 173, 196, 197, 198, 209, 211, 215, 243, 262, 264.
Scheidling, Großkaufmann in Wien 212.
Schering 201, 265.
Schiller 7, 17; W. B. übersetzt Gedichte von Schiller 22, 259.
Schlesinger, Ludwig 15, 56, 72, 86, 88—89, 96—97, 204, 207, 213, 214, 215, 227, 228, 229, 237, 238, 241, 249, 267.
Schmidt, Anton, Baumeister in Temesvár 70, 200.
Schmidt, Franz, Baumeister in Budapest, Sohn von Anton Schm. 70, 199—200, 201, 202, 204, 207, 228, 237, 264, 265, 266.
Schmidt, G. G., Schrift über die Parallelentheorie (1797) 222.
Schmidt, Martin, Sohn von Franz Schm. 201, 237.
Schumacher 94, 95, 134, 137, 163, 198, 199, 239, 246, 264.
Schur, F. Grundlagen der Geometrie 40, 188, 219, 259.
Schwab, Johann Christian, Schriften zur Parallelentheorie (1801—1814) 222, 264.
Schwarzschild, über das Krümmungsmaß des Raumes 243.
Schweikart, Entdecker der Astralgeometrie 41, 217, 220, 221, 238, 243, 247.
Segre 220.
Seneca 84
Seyffer, Carl Felix, Professor der Astronomie in Göttingen und München, nimmt sich W. B.s in Göttingen an 8, 11; beschäftigt sich mit den Grundlagen der Geometrie 8; zweifelt an der Beweisbarkeit des Parallelenaxioms 41, 210.
Sforza 188, 242, 259.
Shakespeare 17.
Simon, Max, über das Euklidische Parallelenaxiom 41, 219, 220, 265.
Simonis, Theologe aus Siebenbürgen, studiert mit W. B. in Göttingen 8.
Simson, Robert, versucht das Parallelenaxiom zu beweisen (1756) 222.
Spitz, C. 265.
Stäckel 117, 201, 204, 207, 208, 210, 217, 220, 221, 223, 224, 225, 233, 234, 235, 238, 240, 241, 244, 246, 247, 254, 255, 257, 264, 265, 267.
Stephan, König von Ungarn 164.
Struve, Otto Wilhelm, Direktor der Sternwarte zu Pulkowa 94.
Study 132, 245.
Suták, Josef, übersetzt den Appendix ins Magyarische (1897) 203; 219, 265.
Szabó, Johann, malt W. B. im Jahre 1835 215.
Szabó, Peter, findet 1905 das Original des Briefes von Gauß an W. B. vom 6. März 1832 95, 165, 208, 211, 214; 215, 226, 227, 229, 233, 234, 240, 252.
Szabó, Samuel, Vater P. Szabós, 1858—1868 Prof. der Mathematik am Kollegium zu Maros-Vásárhely 95, 165, 200, 233—234, 249.
Szász, Dionys 171.
Szász, Karl, 1820—1848 Prof. am Kollegium zu Nagyenyed, 1853—1855 Prof. am Kollegium zu Maros-Vásárhely 32; Verkehr mit J. B. in Wien 1817—1820 66, 80—81; spätere Ansprüche an die Entdeckung der absoluten Geometrie 81—82, 84, 135, 141, 170, 171, 174; 235, 236, 246, 247, 249; Wolfgangs Nachruf auf Sz. 250—251; 252.
Szász, P., Schüler W. B.s 95.
Szathmári, Michael, ev. ref. Theologe in Klausenburg 4.
Szent-Györgyi, Emerich 66.
Szilágyi, Josef, Hauslehrer J. B.s 52, 66.
v. Szily, Koloman 19, 53, 59, 65, 98, 203, 204, 208, 210, 215, 126, 227, 237, 241, 266.
Szöts, Juliana 173, 202.
Szotyori, Arzt W. B.s 59.

Tacquet, Euklid-Ausgabe T.s 184, 222, 257.
Tarnowski, Bezirksarzt in Maros-Vásárhely 251.
Taurinus, gelangt 1826 selbständig zur absoluten Trigonometrie 86; Brief von Gauß an T. vom 8. Nov. 1824 94—95; 221, 235, 238, 247.
Taylor 100.
Teleki, Graf Alexius T. 66.
Teleki, Graf Josef T. 4, 55, 210.
Teleki, Graf Samuel T. 16, 174, 227.
Telekische Bibliothek 16, 166. 174.
Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos introducendi, Hauptwerk Wolfgangs, Entstehung und Veröffentlichung 27—30; Aufnahme bei den Zeitgenossen 30—32; Grundlagen der Arithmetik 32—37; Grundlagen der Geometrie 38—40; Parallelentheorie 41—50; neue Ausgabe 32, 203, 206.
Tetraeder, Gauß fordert J. B. auf, den Kubikinhalt des Tetraeders in der absoluten Geometrie zu bestimmen 93; Untersuchungen J. B.s über die Kubierung des T.s 109—118.

Thomson, James, englischer Dichter (1700—1748), W. B. übersetzt Gedichte von Th. 22.
Tokody, Johann 21.
Tompa 81.
v. Tötössy, Béla, Herausgeber des Tentamens 32, 203, 206.
Trigonometrie, Zusammenhang zwischen der sphärischen und der absoluten T. 102—109, 150, 157—158.

Überweg, Begründung der Geometrie aus der Bewegung starrer Körper 39, 219.

Vahlen, Grundlagen der Geometrie 259.
Vajda, Daniel, erster Hauslehrer J. B.s 52, 77, 81.
Vajda v. Csernáton, Prof. am Kollegium zu Maros-Vásárhely 16.
Vajna v. Páva, Christine, Frau Kaspar Bolyais 2.
Vályi, Julius, hält an der Universität Klausenburg Vorlesungen über absolute Geometrie 202—203.
Váradi 81.
Vass, Thomas, Bericht über W.B.s letzte Stunden 167—172, 251.
Vega, Freiherr Georg v. V. 6; J. B., studiert V.s großes Lehrbuch der Mathematik 52; 58, 210, 226, 240.
Veronese, über die Grundlagen der Geometrie 188, 259.
Vogel, A. 253.
Voss 217, 218.

Wachter, versucht 1817, das Parallelenaxiom zu beweisen 49—50; 94, 225, 235.
Wagner, H. 265.
Waldeck, Minna, zweite Frau von C. F. Gauß 227.
Wallenberg 217.
Wallis, ersetzt das Parallelenaxiom durch die Forderung der Existenz ähnlicher Figuren (1663) 47, 224.
Warren, Lehre von den imaginären Größen 125, 244.
Weber, Wilhelm Eduard, Prof. der Physik a. d. Universität Göttingen 259.
Winkelmessung, Lobatschefskij und J. B. über die W. 142—145.
Wolter v. Eckwehr, Lehrer der Mathematik an der Wiener Ingenieur-Akademie, Lehrer und später in Arad Vorgesetzter von J. B. 66—67, 69, 71, 141, 235.

Zeyk, Baron Daniel Z., studiert mit W. B. in Göttingen 8, 71.
Zeyk, Baron Josef Z., Sohn von Daniel Z., überbringt Gauß einen Abzug des Appendix 71—73; Bericht über die Aufnahme des Appendix durch Gauß 91—92.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Von vorliegendem Werk ist früher erschienen:

Engel, Dr. **Friedrich**, Professor an der Universität Gießen, und Dr. **Paul Stäckel**, Professor an der Universität Heidelberg, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie.

I. Band: Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von Friedrich Engel. I. Teil: Die Übersetzung. Mit einem Bildnis Lobatschefskijs und mit 194 Figuren im Text. II. Teil: Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben und Schriften. Register. Mit 67 Figuren im Text. [XVI, IV u. 476 S.] 1899. Geh. *M* 14.—, in Halbfranz geb. *M* 15.40.

Dieser Band enthält in deutscher Übersetzung zwei russisch geschriebene Abhandlungen, die bisher für die große Mehrzahl der Mathematiker gar nicht vorhanden waren. Die eine: „Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallelen" ist geradezu ein Lehrbuch der Geometrie von den ersten Anfängen an. Die „Neuen Anfangsgründe" sind 1835—38 erschienen; bei dem historischen Charakter des Buches durfte jedoch die erste Veröffentlichung Lobatschefskijs über den Gegenstand nicht fehlen. Es ist das die 1829—30 erschienene Abhandlung: „Über die Anfangsgründe der Geometrie", die zu den „Neuen Anfangsgründen" insofern eine erwünschte Ergänzung bildet, als sie ausführlich auf die Berechnung der geometrischen Figuren eingeht. Den beiden Abhandlungen folgen sehr ausführliche Anmerkungen und eine Lebensbeschreibung Lobatschefskijs.

Bolyai de Bolya, Wolfgang, tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici. Editio secunda. Tomus I: Conspectus arithmeticae generalis. Mandato Academiae Scientiarum Hungaricae suis adnotationibus adiectis ediderunt Iulius König et Mauritius Réthy, Academiae Scientiarum Hungaricae sodales. Mit dem Bildnis des Verfassers u. 11 lithogr. Tafeln. [XII u. 679 S.] 4. 1899. In Halbkalbleder geb. *M* 40.—

——— Tomus II: Elementa geometricae et appendices. Mandato Academiae Scientiarum Hungaricae suis adnotationibus adiectis ediderunt Iosephus Kürschák, Mauritius Réthy, Béla Tötössy de Zepethnek, Academiae Scientiarum Hungaricae sodales. Pars prima: Textus [LXIII u. 437 S.] Pars secunda: Figurae. [LXXV u. VII tabulae] 4. 1904. In Halbkalbl. geb. zus. *M* 40.—

Der erste Band des Tentamen enthält alles zur Arithmetik und Analysis gehörige; der zweite bringt die geometrischen Kapitel des Werkes und als wichtigste Teile die Appendix von Johann Bolyai und den seit der Vergriffenheit der ersten Ausgabe schwer zugänglichen und darum bisher nicht gebührend gewürdigten Conspectus geometriae generalis von Wolfgang Bolyai.

Bei der Neuausgabe sind alle Verbesserungen und Ergänzungen, die W. Bolyai in seiner „Recensio per auctorem ipsum facta" selbst als erwünscht angezeigt hat, überall in Betracht gezogen und, soweit sie nicht bloße Druckfehler betreffen, auch in den Noten als Änderungen erwähnt. Im übrigen ist alle Sorgfalt verwendet, um die Ausgabe zu einer des Verfassers würdigen zu machen, damit neben dem Sohne auch des Vaters grundlegende Untersuchungen einem stets größeren Kreise bekannt werden.

Gauß, Carl Friedrich, und **Wolfg. Bolyai**, Briefwechsel. Mit Unterstützung der Königl. Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von Franz Schmidt, weiland Baumeister in Budapest und Dr. Paul Stäckel, Professor an der Universität Heidelberg. [XVI u. 208 S.] 4. 1899. In Halbkalblederband *M* 16.—

Der Briefwechsel beider gibt ein anziehendes Bild des jungen Gauß, der von Entdeckung zu Entdeckung fortschreitend unsterblichen Ruhm erwirbt. Er zeigt uns Bolyai in rastlosem Kampfe mit der Ungunst der Umstände, die ihn hindern, die Früchte einer verheißungsvollen Jugend einzuernten, die ihm aber niemals die Begeisterung für seine Ideale und die Wärme des Herzens zu rauben vermögen. Als ein versöhnender Abschluß erscheint es, daß Wolfgangs Sohn Johann durch die Schöpfung der absoluten Geometrie das uralte Problem bezwingt, mit dem sein Vater vergebens gerungen hatte, und dabei in wunderbarer Weise mit Gauß zusammentrifft, der Johann als ein Genie erster Größe anerkennt.

Die Munifizenz der Akademie hat es gestattet, anhangsweise eine Reihe weiterer auf Gauß und Bolyai bezüglicher Briefe, sowie erläuternde Anmerkungen hinzuzufügen und einige Briefe in getreuer Nachbildung beizugeben.

Bolyai de Bolya, Ioannes, appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem, adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Editio nova oblata ab Academia Scientiarum Hungarica ad diem natalem centesimum auctoris concelebrandum. Ediderunt Iosephus Kürschák, Mauritius Réthy, Béla Tötössy de Zepethnek, Academiae Scientiarum Hungaricae sodales. [VII, 40 S. u. 7 Tafeln.] 4. 1903. geh. *M.* 4.—

Eine Neuausgabe dieser zuerst 1832 als Anhang zu W. Bolyais Tentamen erschienenen Schrift des Sohnes, in der dieser seine vom Parallelenaxiom unabhängige Geometrie entwickelt.

——— libellus post saeculum quam Ioannes Bolyai de Bolya anno MDCCCII a. d. XVIII kalendas Ianuarias Claudiopoli natus est ad celebrandam memoriam eius immortalem ex consilio ordinis Mathematicorum et Naturae Scrutatorum Regiae Litterarum Universitatis Hungaricae Francisco-Iosephinae Claudiopolitanae editus. Mit 1 Faksimile. [XV u. 155 S.] 4. 1903. geh. *M.* 6.—

Diese Festschrift enthält außer dem Faksimile und einer lateinischen Übersetzung des historisch wichtigen Briefes, den J. Bolyai am 3. November 1823 an seinen Vater gerichtet hat, eine Abhandlung von L. Schlesinger „über einige funktionentheoretische Anwendungen der absoluten Geometrie", in welcher versucht wird, von gewissen geometrischen Problemen ausgehend, einen naturgemäßen Aufbau der Theorie der Fuchsschen Funktionen zu skizzieren, eine Abhandlung von P. Stäckel „über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten", in deren erstem Teil erörtert wird, in welcher Weise die Euklidische Mechanik auf höhere Mannigfaltigkeiten ausgedehnt werden kann, während in dem zweiten Teil die Einzeluntersuchungen aus diesem Gebiete systematisch geordnet und kurz charakterisiert werden, und schließlich eine chronologisch geordnete Bibliographie der absoluten Geometrie (1837—1902) von R. Bonola, die über 900 Titel aufzählt.

Cantor, Geheimer Hofrat Dr. **M.,** Professor an der Universität Heidelberg, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 4 Bänden. Geheftet und in Halbfranz gebunden.

I Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. 3. Auflage. Mit 114 Figuren und 1 lithogr. Tafel. [VI u. 941 S.] 1907. *M.* 24.—, geb. *M.* 26.—

II. — Vom Jahre 1200 bis zum Jahre 1668. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. In 2 Abteilungen. Mit 190 Figuren. [XII u. 943 S.] 1900. *M.* 26.—, geb. *M.* 28.—

III. — Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. In 3 Abteilungen. Mit 146 Figuren. [X u. 923 S.] 1901. *M.* 25.—, geb. *M.* 27.—

IV. — Vom Jahre 1759 bis zum Jahre 1799. Unter Mitarbeit von V. Bobynin, A. v. Braunmühl, F. Cajori, S. Günther, V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti, C. R. Wallner, herausgeg. von M. Cantor. [VI u. 1113 S.] 1908. *M.* 32.—, geb. *M.* 35.—

„Einen hervorragenden Platz unter den neuen Veröffentlichungen über die Geschichte der Mathematik nimmt die zusammenfassende Darstellung ein, die uns Moritz Cantor geschenkt hat. Mit rastlosem Fleiß, mit nie ermüdender Geduld, mit der unverdrossenen Liebe des Sammlers, der auch das scheinbar Geringe nicht vernachlässigt, hat Moritz Cantor dies kolossale Material gesammelt, kritisch gesichtet, durch eigene Forschungen ergänzt, nach einheitlichen Grundsätzen und einheitlichem Plan zu einem Ganzen verschmolzen, und indem er in seltener Unparteilichkeit bei strittigen Fragen, deren die Geschichte der Mathematik so viele hat, auch die abweichenden Ansichten zu Wort kommen ließ, hat er ein Werk geschaffen, das die reichste Quelle der Belehrung, der Anregung für einen jeden ist, der sich über einen geschichtlichen Fragepunkt Rat holen, oder an der Geschichte der Mathematik mitarbeiten will. . . ."

(Aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen.)

Frischauf, Dr. J., Professor an der Universität Graz, absolute Geometrie nach Johann Bolyai bearbeitet. [XII u. 96 S.] gr. 8. geh. *M.* 2.—

Das vorstehende ist eine deutsche Bearbeitung von J. Bolyais Appendix. Die für den Anfänger an einigen Stellen zu kurze Darstellung ist vom Bearbeiter erweitert und in einigen wesentlichen Punkten ergänzt worden, so daß jedermann — auch ohne mathematische Vorkenntnisse — den Inhalt der Schrift ohne Schwierigkeit zu verstehen imstande ist.

Bonola, Dr. R., Professor an der Scuola Normale zu Pavia, die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Autor. deutsche Ausgabe von Dr. H. Liebmann, Professor an der Technischen Hochschule zu München. Mit 36 Textfiguren. [VIII u. 245 S.] 8. 1908. In Leinw. geb. *M* 5.—

Das vorliegende Buch ist eine vom Verf. wie Übersetzer erweiterte Ausgabe des zuerst 1906 bei Zanichelli in Bologna erschienenen Werkes, das in möglichst elementar gehaltener Darstellung Ziele und Methoden der nichteuklidischen Geometrie auch denen verständlich machen will, die mit nur elementaren mathematischen Vorkenntnissen ausgestattet sind.

Lobatschefskij, N. I., imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Aus dem Russischen übersetzt und Anmerkungen herausgegeben von Heinrich Liebmann, Prof. an der Technischen Hochschule zu München. Mit 39 Figuren und einer Tafel. [XI u. 187 S.] gr. 8. 1904. Geh. *M* 8.—

Die Ausgabe dieser beiden Abhandlungen bildet die Fortsetzung der von Fr. Engel besorgten Ausgabe der beiden grundlegenden Werke Lobatschefskijs „Über die Anfangsgründe der Geometrie" und „Neue Anfangsgründe der Geometrie" in „Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie" Bd. I.

In der „Imaginären Geometrie" werden die trigonometrischen Formeln durch Einführung imaginärer Argumente in die sphärische Trigonometrie sehr schnell entwickelt und dann zur Bestimmung des Flächeninhalts von Figuren, sowie auf die Gammafunktion und elliptische Integrale angewendet.

Die andere Arbeit setzt sich das Ziel, eine Reihe von Integralen zu bestimmen oder doch aufeinander zurückzuführen, indem ein und derselbe Körper (z. B. der Kegel oder das Tetraeder) auf verschiedenen Wegen berechnet wird.

Müller, Dr. **Felix**, Professor in Dresden, Führer durch die mathematische Literatur für Studierende. Mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften. [X u. 252 S.] gr. 8. 1909. Geh. *M* 7.—, in Leinwand geb. *M* 8.—

Das Buch gibt eine systematische Übersicht über diejenigen Einzelwerke und Journalabhandlungen aus der reinen Mathematik, deren Kenntnis dem Studierenden unentbehrlich ist Besondere Berücksichtigung haben die historisch wichtigen Schriften gefunden, sowie auch die Zeitschriften-Literatur und die Encyklopädien. Der Studierende, welcher Vorlesungen über eine spezielle Disziplin besucht, wird in den Stand gesetzt, die Quellen dieser Disziplin, die Originalarbeiten, die Lehrbücher, die Aufgabensammlungen, die Tafeln usw., auf welche in der Vorlesung oft nur in Kürze hingewiesen werden kann, mit Leichtigkeit aufzufinden. Auch weist der Führer auf Studienwerke für diejenigen Disziplinen hin, über welche nicht gelesen wurde.

——— Gedenktagebuch für Mathematiker. 3. Aufl. Mit einem Bildnis des Verfassers. [IV u. 121 S.] gr. 8. 1912. Kart. *M* 2.—

Das „Gedenktagebuch für Mathematiker" enthält zahlreiche Daten aus der Geschichte der Mathematik, auf alle Tage des Jahres verteilt. Es ist im Jahre 1879, also vor nunmehr 32 Jahren, entstanden. Erst im Laufe mehrerer Jahre gelang es, für einen jeden Tag des Jahres eine historisch wichtige Notiz zu gewinnen. Jetzt trägt ein jeder Tag des Jahres in meinem „Gedenktagebuch" eine größere Zahl von Nachrichten. Pietätvolle Mathematiker werden gern der Männer gedenken, welche unsere Wissenschaft gefördert haben. Deshalb kann man als Motto des „Gedenktagebuches" getrost die Worte setzen: *„Mathematico nulla dies nisi festiva."*

Rudio, Dr. **F.**, Professor am Polytechnikum zu Zürich. Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Mit vier Abhandlungen (in deutscher Übersetzung) über die Kreismessung von Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Mit Figuren im Text. [VIII u. 166 S.] gr 8. 1892. Geh. *M* 4.—, in Leinwand geb. *M* 4.80.

Nachdem das Problem der Quadratur des Kreises in dem Nachweis der Transzendenz der Zahl π seine Erledigung gefunden hat, erschien es dem Verf. nicht ungerechtfertigt, mit vorliegender Schrift die Aufmerksamkeit auch auf diejenigen älteren Arbeiten, denen das Problem von der Quadratur des Zirkels eine direkte, weithin wahrnehmbare Förderung verdankt, zu lenken, und diese Arbeiten in sorgfältiger Übersetzung allgemein zugänglich zu machen. Es sind dies die Abhandlungen: *κύκλου μέτρησις*, von Archimedes; De circuli magnitudine inventa, von Huygens; Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectifikation des Circuls suchen, von Lambert und Note, où l'on démontre que le rapport de la circonférence au diamètre et son quarré sont des nombres irrationnels, von Legendre.

In der Einleitung ist dem Buche eine historische Übersicht über die Entwickelung des Problems von der Quadratur des Zirkels, von den ältesten Zeiten bis auf die Gegenwart vorausgeschickt.

Stäckel, Dr. **Paul**, Prof. a. d. Universität Heidelberg und Dr **Friedrich Engel**, Prof. a. d. Universität Greifswald, die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. Mit 145 Figuren im Text und der Nachbildung eines Briefes von Gauß. [X u. 325 S.] gr. 8. 1895. geh. *M* 9.—, in Leinwand geb. *M* 11.—

Etwas Ähnliches, wie F. Rudio in seinem Buche: „Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels" für das Problem von der Quadratur des Kreises geleistet hat, wollen die Verfasser für die Parallelentheorie leisten: sie wollen zeigen, wie man nach und nach zu der Einsicht gelangt ist, daß das elfte Euklidische Axiom ein wirkliches Axiom, daß es also unbeweisbar ist. Wie Rudio lassen auch sie die wichtigsten Autoren: Euklid, Wallis, Saccheri, Lambert, Gauß selbst reden, indem sie ihre Betrachtungen wörtlich oder in getreuer Übersetzung mitteilen. Ein verbindender Text stellt den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Autoren dar und bringt, wo es nötig ist, Erläuterungen und sonstige Bemerkungen. Außerdem legen die Verfasser Gewicht auf eine möglichst vollständige Zusammenstellung der übrigen Literatur über den Gegenstand. Sie schließen vorläufig mit Gauß ab, weil Gauß der erste ist, der die Vergeblichkeit aller Versuche, das elfte Axiom zu beweisen, vollkommen klar erkannt hat, die Fortsetzung bilden die „Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie" derselben beiden Verfasser.

Schließlich sei noch bemerkt, *daß alle die Abhandlungen, die mitgeteilt werden, einen ganz elementaren Charakter tragen und zu ihrem Verständnisse durchaus keine Kenntnis der höheren Mathematik voraussetzen.*

——— und Dr. **W. Ahrens** in Rostock, der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuß über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. Herausgegeben, erläutert und durch einen Abdruck der Fußschen Liste der Eulerschen Werke ergänzt. Erweiterter Sonderabdruck aus Bibliotheca mathematica. 3. Folge. Band 8. [VIII u. 160 S.] gr. 8. 1908. Geh. *M* 8.—

Die zweihundertste Wiederkehr des Geburtstages von L. Euler hat das Interesse für eine Gesamtausgabe seiner Werke erweckt, die Jacobi und Fuß vor 60 Jahren in Angriff genommen hatten. Der Briefwechsel zwischen ihnen gibt aber nicht nur hierüber Aufschluß, sondern enthält auch eine solche Fülle neuen wertvollen Materials zur Bio- und Bibliographie Eulers, daß er jedem, der sich mit der Geschichte der Mathematik im 18. Jahrhundert beschäftigt, unentbehrlich sein wird.

Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertume. I. Heft. Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Griechisch und deutsch von Professor Dr. Ferdinand Rudio in Zürich. Mit einem historischen Erläuterungsberichte als Einleitung. Im Anhang ergänzende Urkunden, verbunden durch eine Übersicht über die Geschichte des Problems von der Kreisquadratur vor Euklid. Mit 11 Figuren im Texte. [X u. 184 S.] 8. 1907. Steif geh. *M* 4.80.

Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates ist eine der wichtigsten Quellen für die Geschichte der griechischen Geometrie vor Euklid. Enthält doch dieser Bericht, neben vielen anderen historisch höchst wertvollen Mitteilungen, einen umfangreichen wörtlichen Auszug aus der leider verloren gegangenen Geschichte der Geometrie des Eudemus!

Vorausgeschickt ist eine Einleitung, die neben anderen historischen Erläuterungen zugleich einen fortlaufenden Kommentar zu dem ganzen Berichte darbietet. Und schließlich sind in einem Anhange ergänzende Urkunden (griechisch und deutsch) in großer Zahl vereinigt und durch verbindenden Text in einen lesbaren Zusammenhang gebracht, so daß das vorliegende Heft nunmehr insofern eine gewisse Abrundung besitzt, als es alles enthält, was auf dem Gebiete der Kreisquadratur vor Euklid geleistet worden ist.

Zeuthen, Dr. G. H., Professor an der Universität Kopenhagen, Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Deutsch von Raphael Meyer. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1903. Geh. *M* 16.—, in Leinwand geb. *M* 17.—

Ähnliche Zwecke wie in seiner früher erschienenen Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter verfolgend, ist der Verfasser besonders bestrebt gewesen, die reiche innere Entwicklung der Mathematik selbst hervorzuheben, die in den behandelten Jahrhunderten statthatte und einen gewissen Abschluß fand. Um in der übrigen Darstellung immer die mathematische Entwicklung verfolgen zu können, hat der Verfasser einen ausführlichen historischen und biographischen Überblick vorausgeschickt.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QA
29
B69S8
T.1

Stackel, Paul Gustav
Wolfgang und Johann Bolyai,
geometrische Untersuchungen

P&ASci